

Identifikation bilinearer Systeme

Dissertation
zur Erlangung des Grades eines
Doktor-Ingenieurs

dem Fachbereich Elektrotechnik/Physik
der Universität Bremen

vorgelegt von
Paul-Josef Schubert

Bremen 1984





Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41543123_0004

IDENTIFIKATION BILINEARER SYSTEME

Dissertation
zur Erlangung des Grades eines
Doktor-Ingenieurs

dem Fachbereich Elektrotechnik/Physik
der Universität Bremen

vorgelegt von
Paul-Josef Schubert

Bremen

1984

Diese Arbeit hat dem Promotionsausschuß Dr.-Ing. der Universität Bremen als Dissertation unter dem Titel "Identifikation bilinearer Systeme" vorgelegen.

An dem Promotionsverfahren haben Prof. Dr. D. Popović und Prof. Dr. G. Ludyk als Gutachter mitgewirkt.

Das Kolloquium hat am 20. Juli 1984 stattgefunden.

Inhaltsverzeichnis

<u>Verzeichnis der verwendeten Formelzeichen</u>	1
1. <u>Einleitung</u>	5
1.1 Entwicklungsgeschichte bilinearer Systeme	5
1.2 Problemstellung und Zielsetzung	8
2. <u>Mathematische Systembeschreibung bilinearer Systeme</u>	10
2.1 Zustandsbeschreibung zeitdiskreter bilinearer Systeme	10
2.2 Beispiel: Fremderregter Gleichstrommotor	13
3. <u>Kanonische Formen bilinearer Systeme mit ihren Eingangs-Ausgangs-Beschreibungen</u>	17
3.1 Beobachtbarkeits-Normalform	17
3.1.1 Eingangs-Ausgangs-Beschreibung des Systems durch eine Differenzengleichung	21
3.1.2 Eingangs-Ausgangs-Beschreibung des Systems durch eine Volterra-Reihe	25
3.2 Spezielle Klassen der bilinearen Systeme	26
3.2.1 Lineares System mit multiplikativer Verknüpfung des Ein- und Ausgangs	30
3.2.2 Lineares System mit multiplikativer Rückführung	35
3.3 Beispiel: Zweitank-System	40
3.4 Abschließende Betrachtung bilinearer Systembeschreibungen	44
4. <u>Identifikation bilinearer Systeme</u>	46
4.1 Übersicht	47
4.1.1 Adaptive Identifikationsverfahren	50

II

5. <u>Identifikation zeitdiskreter bilinearer Mehrfachsysteme</u>	52
5.1 Identifikation nach der direkten Methode von Ljapunov	52
5.1.1 Entwicklung des Adaptionalgorithmus	55
5.1.2 Stabilitätsnachweis	57
5.1.3 Identifikationsverfahren mit verbesserter Konvergenz	61
5.2 Simulationsergebnisse	68
6. <u>Identifikation zeitdiskreter bilinearer Einfachsysteme: Sonderfälle</u>	75
6.1 Lineares System mit multiplikativer Rückführung	75
6.2 Lineares System mit multiplikativer Verknüpfung des Ein- und Ausgangs	79
6.3 Simulationsergebnisse	80
7. <u>Adaptiver Beobachter zeitdiskreter bilinearer Systeme</u>	83
7.1 Struktur des adaptiven Beobachters	85
7.2 Entwurf eines parametrisierten Beobachters	88
7.3 Vereinfachung des dynamischen Systems $\underline{S}(k)$	92
7.4 Ableitung des Adaptiongesetzes	95
7.5 Simulationsergebnisse	103
8. <u>Zusammenfassung</u>	107
9. <u>Anhang</u>	109
9.1 Das Gram-Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren	109
10. <u>Literaturverzeichnis</u>	112

Verzeichnis der verwendeten Formelzeichen

$\underline{A}(k), \underline{A}'(k)$	Systemmatrix
$a_{ij}(k)$	Element der Systemmatrix $\underline{A}$
A	Querschnitt
$\text{adj } \underline{T}(k)$	adjungierte Matrix $\underline{T}(k)$
$\underline{b}(k)$	Eingangsvektor
$\underline{B}(k)$	Eingangsmatrix
B	magnetische Induktion
$\underline{c}^T(k)$	Beobachtungsvektor
$\underline{C}(k)$	Beobachtungsmatrix
$d_j(k)$	Eingangsgröße des Beobachters
$\det$	Determinante
$\Delta V(\underline{x}, k)$	erste Differenz der Ljapunovfunktion
$\underline{e}(k)$	Zustandsfehlervektor
$e_i(k)$	Komponente des Zustandsfehlervektors
e_u	Gegenspannung
$\underline{f}(\underline{x}(k), \underline{u}(k), k)$	rechte Seite der Zustandsgleichung
$\underline{f}$	Parametervektor
$\underline{f}(\underline{u}, k)$	Vektor
$\underline{F}$	Beobachtermatrix
$\underline{F}(\underline{u}, k)$	Matrix
F	Kraft
$\underline{g}$	Parametervektor
$\underline{g}(\underline{x}, k)$	Vektor
$\underline{G}(\underline{x}, k)$	Matrix
$\underline{h}$	Rückkopplungsvektor
h	Füllhöhe

i_A	Ankerstrom
i_F	Feldstrom
$\underline{I}$	Einheitsmatrix
$\underline{I}_p$	p-dimensionale Einheitsmatrix
$\underline{i}_m$	m-ter Spaltenvektor der Einheitsmatrix $\underline{I}$
J	Trägheitsmoment
$J(\cdot)$	Gütekriterium
k	diskrete Zeit
k_0	Anfangszeit
L_A	Induktivität der Ankerwicklung
L_F	Induktivität der Feldwicklung
$\underline{m}(k)$	Meßvektor des Beobachters
$\hat{\underline{m}}(k)$	orthonormierter Meßvektor von $\underline{m}(k)$
M	Moment
M_A	Antriebsmoment
M_R	Reibungsmoment
M_L	Lastmoment
n	Ordnung des Systems
$\underline{N}$	Matrix des bilinearen Terms
n_{ij}	Element der Matrix $\underline{N}$
$\underline{n}$	Parametervektor
$\underline{O}_{i,j}$	Nullmatrix mit i Zeilen und j Spalten
$\underline{O}_i$	Null-Zeilenvektor
p	Zahl der Eingangsgrößen
$\underline{p}$	Parametervektor
$\underline{p}_i$	Untervektoren des Vektors $\underline{p}$
Q	Volumenstrom
q	Zahl der Ausgangsgrößen

$\underline{R}(k)$	Parameterfehlermatrix
$\underline{r}_i^T(k)$	i-te Zeile der Matrix $\underline{R}(k)$
R_A	Widerstand der Ankerwicklung
R_F	Widerstand der Feldwicklung
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{R}^n$	n-dimensionaler Raum
$\underline{S}(k)$	Beobachtermatrix
$\underline{s}_{ij}(k), \underline{s}'_j(k)$	Spaltenvektoren der Matrix $\underline{S}(k)$
$\underline{T}, \underline{T}(k)$	Transformationsmatrix
$\underline{t}$	Vektor
T	Tastzeit
T (hochgesetzt)	transponiert
$u(k), \tilde{u}(k)$	Eingangsgröße
$\underline{u}(k)$	Eingangsvektor
$u_i(k)$	Komponente des Eingangsvektors $\underline{u}(k)$
$\underline{u}(k, k+n-1)$	Eingangsfolgevektor
u_A	Ankerspannung
u_F	Feldspannung
V	Volumen
$V(\underline{x}, k)$	Ljapunovfunktion
$\underline{v}(k)$	Meßvektor
$\hat{\underline{v}}(k)$	orthonormierter Meßvektor von $\underline{v}(k)$
$\frac{\underline{v}}{v} _{k_0+1, k}$	Meßvektorfolge
$\underline{w}(k)$	Meßvektor
$\hat{\underline{w}}(k)$	orthonormierter Meßvektor von $\underline{w}(k)$
$\underline{x}(k)$	Zustandsvektor
$x_i(k)$	Komponente des Zustandsvektors $\underline{x}(k)$
$\underline{\hat{x}}(k)$	Beobachter-Zustandsvektor
$\underline{x}_0$	Anfangszustand
$\underline{x}_r$	Ruhelage

$y(k)$	Ausgangsgröße
$\hat{y}(k)$	Ausgangsgröße des Beobachters
$\underline{y}(k)$	Ausgangsvektor
$\underline{y}(k, k+n-1)$	Ausgangsfolgevektor
$\underline{z}(k)$	Meßvektor
$\frac{z}{z} \Big _{k_0, k-1}$	Meßvektorfolge
	Verschiebungsoperator
α	Verstärkungsfaktor
$\beta_i(k)$	Parameter des Systems
$\epsilon(k)$	Verstärkungsfaktor
$\underline{\xi}(k)$	Eingangsvektor
$\eta(k)$	Ausgangsfehler
$\gamma(k)$	Verstärkungsfaktor
$\underline{\Gamma}(k)$	Parameterfehlermatrix
λ	Eigenwert
μ	Konstante
ω	Winkelgeschwindigkeit
Ω	Vektorraum
$\underline{\Phi}(k)$	Parameterfehlervektor
Φ_F	magnetischer Fluß
$\underline{\Phi}(k)$	Parameterfehlermatrix
$\underline{\Psi}(k)$	Parameterfehlermatrix
$\theta(k)$	Verstärkungsfaktor
$\ \cdot \ $	Euklidische Norm
(i, j) - Matrix	Matrix mit i Zeilen und j Spalten
■	Ende einer Definition, Satz oder Bemerkung
*	Größen, die dem System zugeordnet sind

1. Einleitung

1.1 Entwicklungsgeschichte bilinearer Systeme

Zu Beginn der Systemtheorie wurden komplexe physikalische Phänomene fast ausschließlich durch lineare zeitinvariante Modelle vereinfacht beschrieben. Der Grund für diese Vorgehensweise beruht auf der Einfachheit der analytischen Behandlung linearer Systeme und führte zur Entwicklung einer umfangreichen modernen Theorie linearer Systeme.

Die zunehmende Forderung an die Genauigkeit und Schnelligkeit komplexer industrieller Automatisierungssysteme, ließ die Grenzen der Theorie linearer Systeme bald offensichtlich werden. Nichtlineare Eigenschaften der Systeme und die Zeitabhängigkeit ihrer Parameter erfordern zur Steuerung und Regelung solcher Systeme den Einsatz theoretischer Verfahren, deren Schwierigkeitsgrad im allgemeinen erheblich über dem der linearen Theorie liegt.

Derartige nichtlineare Systeme treten sehr häufig auf. Genauer formuliert sind physikalische Systeme normalerweise sowohl nichtlinear, als auch zeitvariant. So sind z.B. biologische Systeme durch Wachstum und Verfall erheblichen Schwankungen unterworfen, bei den technischen Systemen verändern sich ebenfalls (z.B. durch Alterung ihrer Bauelemente) die Werte ihrer Parameter, und auch bei den soziologischen und ökonomischen Systemen trifft dies zu.

Als Folge davon zeigt sich seit einigen Jahren wachsendes Interesse für die Methoden der Behandlung nichtlinearer, dynamischer Systeme. In zahlreichen Fällen erlangte eine spezielle Klasse nichtlinearer Systeme an Bedeutung. Gemeint sind bilineare Systeme (BLS), die den Gegenstand dieser Arbeit darstellen.

Bilineare Modelle dynamischer Systeme mit der allgemeinen Darstellung

$$\underline{x}(k+1) = \underline{f}(\underline{x},k) + \underline{G}(\underline{x},k) \underline{u}(k) , \quad (1.1)$$

wobei $\underline{x}$ ein n-dimensionaler Zustandsvektor,
 $\underline{u}$ ein p-dimensionaler Eingangsvektor und
 k die diskrete Zeit darstellt,

sind mehrfach eine gute Annäherung an die wirklichen Verhältnisse. Sie können als ein Bindeglied zwischen den linearen und nichtlinearen Systemen verstanden werden. So zeigt der folgende Abschnitt 2, daß ein bilineares System als Sonderfall eines nichtlinearen Systems, oder als ein spezielles lineares zeitvariantes System gelten kann. Der Grund, bei dem bilineare Modelle sehr häufig den nichtlinearen Modellen vorgezogen werden, liegt in der einfacheren Beschreibung dieser Systeme.

Den neuen Problemstellungen stehen neue Lösungsmöglichkeiten gegenüber. In den letzten Jahren wurden, insbesondere für die Beschreibung im Zustandsraum, leistungsfähige Verfahren zur Analyse und Synthese nichtlinearer und / oder zeitvarianter Systeme entwickelt. Die Reglerentwürfe, die im Zustandsraum meist relativ kompliziert ausfallen, lassen sich durch den Einsatz von Prozeßrechnern relativ einfach verwirklichen.

Es ist deshalb nicht verwunderlich, daß in den letzten 10 Jahren immer häufiger Fachaufsätze über bilineare Systeme erscheinen. Die Theorie dieser Systeme ist noch nicht ausreichend entwickelt, obwohl es zahlreiche Untersuchungen zu einzelnen Aspekten dieses Gebietes gibt.

Einen entscheidenden Aufschwung erhielt die theoretische Betrachtung bilinearer Systeme in den frühen 60er Jahren,

unterstützt durch die 'Atomic Energy Commission' (AEC), die durch R.R. Mohler | 1 | zusammenfassend dargestellt wurden. Damals wurde ein Kernreaktor-Modell entwickelt, bei dem die 'open-loop' Prozesse für die Kernspaltung, die Wärmeübertragung und Flüssigkeitsdynamik, durch bilineare Modelle angenähert wurden.

Anfang der 70er Jahre bekam die Erforschung der bilinearen Systeme einen neuen Anstoß, als unter der Leitung von A. Ruberti | 2 | 'strukturvariable Systeme' untersucht wurden, und einzelne Beiträge über die Theorie der bilinearen Systeme, sowie deren Anwendung entstanden | 3 |.

Viele einschlägige Tagungen widmeten sich den bilinearen Systemen, wie z.B. 1974 die 'Allerton Conference on Circuits and Systems', 1976 die 'Decision and Control Conference', 1977 und 79 die 'Joint Automatic Control Conference' und 1980 das 'ASME Winter Meeting'.

In zahlreichen Berichten und Veröffentlichungen wurde auf die wachsende Bedeutung der bilinearen Systeme hingewiesen. Unter diesen sind zwei Übersichtsaufsätze von R.R. Mohler | 4 | erschienen, in denen die wichtigsten Veröffentlichungen und Erkenntnisse zusammengefaßt wurden.

1.2 Problemstellung und Zielsetzung

Die Aufmerksamkeit, die der Identifikation bilinearer Systeme mit Hilfe adaptiver Verfahren bisher in der regelungstechnischen Praxis gewidmet wurde, nimmt sich gegenüber den Vorzügen bescheiden aus. Wie die Erfahrung bei linearen Systemen gezeigt hat, ist bei der Verwirklichung adaptiver Regelungskonzepte die adaptive Identifikation ein wichtiger Schritt bei der Verwendung von (Zustands-) Reglern. Die Regelgüteverluste bei adaptiven Reglern sind umso geringer, je empfindlicher der Identifikationsalgorithmus gegenüber Parameteränderungen reagiert.

Die Ableitung verschiedener Entwurfsverfahren zur Lösung des adaptiven Identifikationsproblems für bilineare Systeme, ist das Ziel der vorliegenden Arbeit. Im Abschnitt 2 werden zunächst einige (größtenteils aus der Literatur bekannte) systemtheoretische Begriffe und Sätze der bilinearen Systeme zusammengestellt, die später benötigt werden, bzw. die zum Verständnis beitragen.

Ferner wird im Abschnitt 3 durch geeignete Beschreibungsformen eine Klasseneinteilung der bilinearen Systeme vorgenommen, um daraus Anwendungsmöglichkeiten für Identifikationsverfahren abzuleiten. Zum Teil erfolgt dies auf theoretischem Wege, wobei auch aus der Literatur bereits bekannte Ergebnisse kurz dargestellt werden, um eine Zusammenfassung aller wesentlichen Gesichtspunkte zu erreichen.

Abschnitt 4 dient zur Einführung in die Theorie verschiedener Identifikationsverfahren, insbesondere der adaptiven Parameterschätzung mit Bezugsmodell, bzw. Beobachtermodell.

Den wesentlichen Teil dieser Arbeit stellen Abschnitt 5 und 6 dar, in denen aus der Theorie linearer Systeme bi-

lineare adaptive Identifikationsverfahren entwickelt und miteinander verglichen werden. Dabei stützen sich die im Abschnitt 5 dargestellten Parameterschätzverfahren auf die Gradientenmethode, sowie die direkte Methode nach Ljapunov. Um gleichzeitig die nicht erreichbaren Systemzustände zu schätzen, wird im Abschnitt 6 ein adaptiver Beobachter für den im Abschnitt 3.2.1 beschriebenen Sonderfall der bilinearen Systeme entworfen. Bei allen Adaptionialgorithmen wird besonders Wert auf schnelles Konvergenzverhalten gelegt.

Die mathematischen Methoden zur Parameter- und Zustands-schätzung werden jeweils auf dem Digitalrechner implementiert. Es soll damit die Wirksamkeit der Entwurfsverfahren anhand von Simulationen nachgewiesen werden. Für den Nachweis wurden zwei bilineare Systembeispiele 2. Ordnung verwendet, mit denen ein gegenseitiger Vergleich der Ergebnisse möglich ist.

Basierend auf diesen Untersuchungen und auf einer Abschätzung des numerischen Aufwandes, werden abschließend Kriterien und Gesichtspunkte für den praktischen Einsatz vorgeschlagen.

2. Mathematische Systembeschreibung bilinearer Systeme

2.1 Zustandsbeschreibung zeitdiskreter bilinearer Systeme

Im folgenden wird eine Systembeschreibung der bilinearen Systeme in Anlehnung an [3] gegeben.

Definition 2.1:

Das nichtlineare zeitdiskrete System, dargestellt im Zustandsraum durch

$$\underline{x}(k+1) = \underline{f}(\underline{x}(k), \underline{u}(k), k) \quad (2.1)$$

wird als bilineares System bezeichnet, wenn es sowohl linear in den Eingangsvariablen u_l ($l = 1, \dots, p$), als auch linear in den Zustandsvariablen x_i ($i = 1, \dots, n$) ist, jedoch nichtlinear in Abhängigkeit von beiden gemeinsam. Dann treten in den Zustandsgleichungen bilineare Terme in den Variablen x_i und u_l auf:

$$\underline{x}(k+1) = \underline{A}(k)\underline{x}(k) + \underline{B}(k)\underline{u}(k) + \sum_{i=1}^p u_i(k) \underline{N}_i(k) \underline{x}(k). \quad (2.2)$$

Sind die Matrizen $\underline{A}(k)$, $\underline{B}(k)$ und $\underline{N}_i(k)$ konstant, so ist das bilineare System zeitinvariant ■

Der Eingangsvektor $\underline{u}(k)$ wirkt nicht nur additiv auf das dynamische Verhalten des Systems ein, sondern auch multiplikativ über den bilinearen Term $\sum u_i \underline{N}_i \underline{x}$.

Die Definition 2.1 des bilinearen Systems erfordert für einige Spezialfälle eine Ergänzung.

Definition 2.2:

Für $\underline{B} \equiv \underline{0}$ heißt das System homogen im Zustand,
 für $\underline{A} \equiv \underline{0}$ homogen in der Steuerung,
 ist $\underline{A} \equiv \underline{B} \equiv \underline{0}$, so heißt das System streng bilinear ■

Die Zustandsgleichung (2.2) enthält die linearen Systeme (alle $\underline{N}_i \equiv \underline{0}$) als Spezialfall.

Eine Umformulierung von (2.1) kann vorgenommen werden, wenn Linearität der Funktion $\underline{f}(\cdot)$ in Bezug auf den Zustand oder auf den Eingang angenommen wird.

Für diese Fälle erhält man jeweilig

$$\underline{x}(k+1) = \underline{F}_1(\underline{u}, k) \underline{x}(k) + \underline{f}_2(\underline{u}, k) \quad (2.3)$$

und

$$\underline{x}(k+1) = \underline{G}_1(\underline{x}, k) \underline{u}(k) + \underline{g}_2(\underline{x}, k) . \quad (2.4)$$

Ein System vom Typ (2.3) wird als ein linear im Zustand, oder als ein strukturvariables lineares System bezeichnet. Eine wesentliche Eigenschaft des Systems ist es, daß die Systemparameter vom bilinearen Term abhängig sind.

Dies wird insbesondere deutlich, wenn man (2.2) umschreibt

$$\underline{x}(k+1) = \left(\underline{A} + \sum_{i=1}^p u_i(k) \underline{N}_i \right) \underline{x}(k) + \underline{B} \underline{u}(k) \quad (2.5)$$

und

$$\underline{A}'(\underline{u}) = \underline{A} + \sum_{i=1}^p u_i(k) \underline{N}_i \quad (2.6)$$

als Systemmatrix auffaßt.

Es ist offensichtlich, daß $\underline{A}'(\underline{u})$ eine Funktion des Eingangsvektors $\underline{u}$ ist.

Beim anderen Fall (2.4) spricht man von einem System, das linear im Eingang bzw. linear in der Steuerung sei. Diese Darstellung wird verwendet, um Probleme der Steuerbarkeit und optimalen Steuerung zu untersuchen.

Bei der Definition des Ausgangs $\underline{y}(k)$ soll von dem einfachsten Fall ausgegangen werden, bei dem der Ausgang nur von den Zuständen abhängig ist, das heißt

$$\underline{y}(k) = \underline{C}(k) \underline{x}(k) \quad , \quad (2.7)$$

wobei $\underline{y}$ ein q -dimensionaler Ausgangsvektor und $\underline{C}(k)$ eine (q,n) -Matrix ist.

Bild 2.1 zeigt das Strukturdiagramm, das der Gleichung (2.2) und (2.7) entspricht.

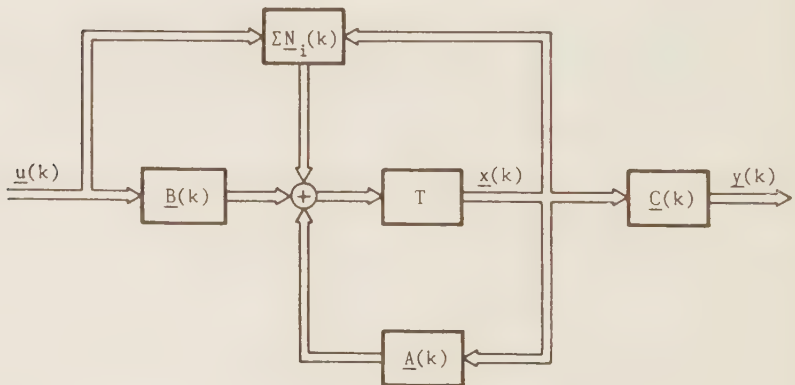


Bild 2.1: Strukturdiagramm eines zeitdiskreten bilinearen Systems

2.2 Beispiel: Fremderregter Gleichstrommotor

Ausgangspunkt ist das vereinfachte Schaltbild 2.2 des Gleichstrommotors, für das die äquivalente Differentialgleichung abgeleitet wird.

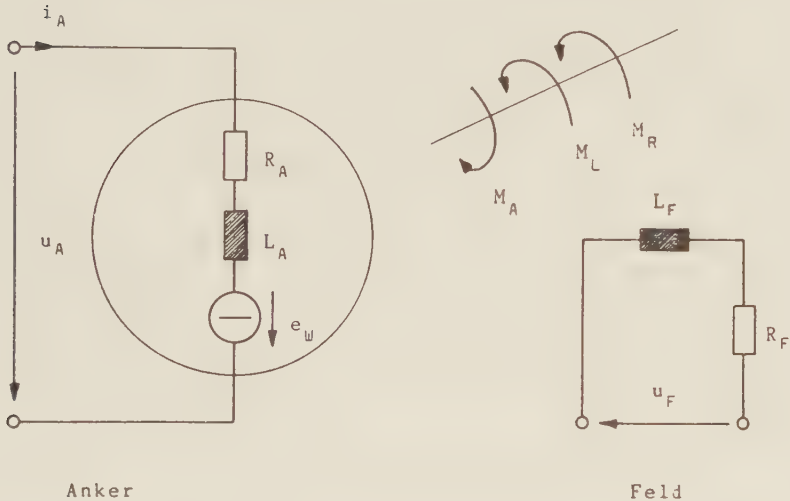


Bild 2.2: Schaltbild eines fremderregten Gleichstrommotors

Für den Spannungsumlauf im Ankerkreis gilt:

$$u_A - e_w = R_A i_A + L_A \dot{i}_A \quad (2.8)$$

Bei Drehung des Rotors wird in der Ankerwicklung eine Spannung e_w induziert, die dem Erregerfeld ϕ_F und der Winkelgeschwindigkeit ω proportional ist, d. h.

$$e_w = c_2 \phi_F \omega \quad (2.9)$$

wobei c_2 eine Motorkonstante ist.

Für eine lineare Magnetisierungskennlinie ergibt sich für das Erregerfeld

$$\phi_F = L_F \cdot i_F , \quad (2.10)$$

(2.9) lautet jetzt

$$e_W = c_2 \cdot L_F \cdot i_F \cdot \omega , \quad (2.11)$$

bzw. (2.8)

$$\dot{i}_A = - \frac{R_A}{L_A} i_A - \frac{k_1}{L_A} i_F + \frac{1}{L_A} u_A . \quad (2.12)$$

Hierbei ist $k_1 = c_2 \cdot L_F$.

Wenn r der Radius des Rotors und F die Kraft auf einen Leiter ist, dann ist das durch diesen Leiter erzeugte Drehmoment

$$m = F \cdot r , \quad (2.13)$$

mit

$$F = B \cdot l \cdot i_A = \frac{\phi_F}{A} l \cdot i_A . \quad (2.14)$$

Für das gesamte Antriebsmoment M_A gilt somit

$$M_A = c_1 \cdot \phi_F \cdot i_A , \quad (2.15)$$

wobei c_1 eine Motorkonstante ist.

Dies ergibt für eine lineare Magnetisierungskennlinie

$$M_A = c_1 \cdot L_F \cdot i_F \cdot i_A . \quad (2.16)$$

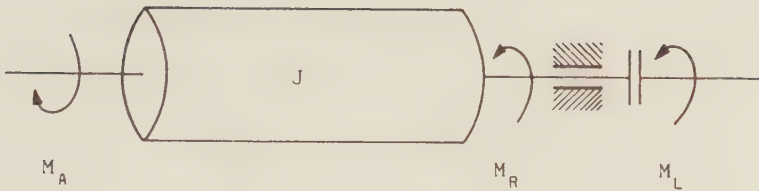


Bild 2.3: Auftretende Momente bei einer fremderregten Gleichstrommaschine

Wirkt auf den Gleichstrommotor das Lastmoment M_L und das Reibungsmoment M_R (siehe Bild 2.3), so wird das für die rotierenden Teile bestimmende Beschleunigungsmoment M durch

$$M = M_A - M_L \quad (2.17)$$

gegeben. Die mechanische Bewegungsgleichung lautet

$$M = M_A - M_L - M_R = J \cdot \ddot{\omega} , \quad (2.18)$$

wobei das Reibungsmoment M proportional zur Winkelgeschwindigkeit ω ist, d.h.

$$M_R = c_3 \cdot \omega . \quad (2.19)$$

Zur Vereinfachung sei

$$J \cdot \ddot{\omega} = M_A - M_R , \quad (2.20)$$

wobei $M_L = 0$ ist.

Aus (2.16) - (2.20) ergibt sich

$$\dot{\omega} = - \frac{c_3}{J} \omega + i_F \frac{k_2}{J} i_A , \quad (2.21)$$

mit $k_2 = c_1 \cdot L_F$.

Die bilineare Zustandsraumdarstellung des fremderregten Gleichstrommotors lautet mit (2.12) und (2.21)

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_A \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_A}{L_A} & 0 \\ 0 & -\frac{c_3}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_A \\ \omega \end{bmatrix} + i_F \begin{bmatrix} 0 & -\frac{k_1}{L_A} \\ \frac{k_2}{J} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_A \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_A} \\ 0 \end{bmatrix} u_A . \quad (2.22)$$

3. Kanonische Formen bilinearer Systeme mit ihren Eingangs-Ausgangs-Beschreibungen

3.1 Beobachtbarkeits-Normalform

Die zeitdiskrete bilineare Zustandsbeschreibung

$$\underline{x}(k+1) = \underline{A} \underline{x}(k) + u(k) \underline{N} \underline{x}(k) + \underline{b} u(k) \quad (3.1)$$

$$y(k) = \underline{c}^T \underline{x}(k), \quad \underline{x}(k_0) = \underline{x}_0 \quad (3.2)$$

mit $\underline{x}(k) \in \mathbb{R}^n$; $u(k), y(k) \in \mathbb{R}$

und der Voraussetzung, daß

$$\text{Rang } \underline{N} = n, \quad (3.3)$$

soll in eine Eingangs-Ausgangs-Beschreibung umgeformt werden. Zu diesem Zweck wird (3.1) umgeschrieben als

$$\underline{x}(k+1) = \underline{A}'(k) \underline{x}(k) + \underline{b} u(k) \quad (3.4)$$

mit

$$\underline{A}'(k) = \{ a_{ij} + n_{ij} u(k) \}, \quad i, j \in \{1, n\}. \quad (3.5)$$

Dadurch erhält man ein im Zustand lineares System, bzw. seine äquivalente Darstellung in Form eines strukturvariablen, linearen Systems. Mit dieser Umformung der Systemgleichung soll die Zustandsbeschreibung auf Beobachtbarkeits-Normalform transformiert werden.

Zu diesem Zweck wird, in Anlehnung an die Überlegungen von S. Beghelli [5], die Transformationsmatrix

$$\underline{T}(k) = \begin{bmatrix} \underline{c}^T \\ \underline{c}^T \underline{A}'(k) \\ \underline{c}^T \underline{A}'(k+1) \underline{A}'(k) \\ \vdots \\ \underline{c}^T \underline{A}'(k+n-2) \dots \underline{A}'(k) \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

aufgestellt, die identisch mit der Beobachtbarkeitsmatrix ist.

Gilt in (3.1) bzw. (3.4) $\text{Rang } \underline{N} = n$, so ist die Singularität der Transformationsmatrix $\underline{T}(k)$ nur von der Eingangssequenz $u(k), u(k+1), \dots, u(k+n-2)$ abhängig. Für jede Eingangssequenz bei der $\underline{T}(k)$ und $\underline{T}(k+1)$ regulär sind, kann der Zustandsvektor $\underline{x}(k)$ mit Hilfe der Transformationsmatrix $\underline{T}(k)$ transformiert werden, d.h. es gilt

$$\underline{x}_B(k) = \underline{T}(k) \underline{x}(k), \quad (3.7)$$

wobei $\underline{T}(k)$ so gewählt wird, daß die mathematische Systembeschreibung nach (3.2), (3.4) auf Beobachtbarkeits-Normalform

$$\underline{x}_B(k+1) = \underline{A}'_B(k) \underline{x}_B(k) + \underline{b}_B u(k) \quad (3.8)$$

$$y(k) = \underline{c}^T_B \underline{x}_B(k) \quad (3.9)$$

transformiert wird.

Hierbei ist

$$\underline{A}'_B(k) = \underline{T}(k+1) \underline{A}'(k) \underline{T}^{-1}(k) \quad (3.10)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \underline{I}_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{a}^T(k) & & & \end{bmatrix},$$

wobei

$$\underline{a}^T(k) = \left[a_1(k), \dots, a_n(k) \right] \quad (3.11)$$

ist und

$$\underline{c}_B^T = \underline{c}^T \underline{T}^{-1}(k) = \left[1, 0, \dots, 0 \right] \quad (3.12)$$

$$\underline{b}_B(k) = \underline{T}(k+1) \underline{b} = \left[b_{B1}(k), \dots, b_{Bn}(k) \right] \quad (3.13)$$

Bemerkung 3.1:

In [5] wurde nachgewiesen, daß die Elemente von $\underline{T}(k)$ (3.6) in der ersten Zeile reelle Zahlen, in der zweiten Zeile Polynome ersten Grades in $u(k)$, in der dritten Zeile Produkte von Polynomen ersten Grades in $u(k)$, $u(k+1)$ und in der n -ten Zeile Produkte von Polynomen ersten Grades in $u(k), u(k+1), \dots, u(k+n-2)$ sind.

Bei der Bildung der inversen Transformationsmatrix

$$\underline{T}^{-1}(k) = \frac{1}{\det \underline{T}(k)} \text{adj } \underline{T}(k) , \quad (3.14)$$

werden die Elemente der Matrix $\underline{T}^{-1}(k)$ zu gebrochen rationalen Funktionen, deren Zähler und Nenner Produkte von Polynomen in $u(k), \dots, u^{n-1}(k), u(k+1), \dots, u^{n-2}(k+1), \dots, u(k+n-3), u^2(k+n-3), u(k+n-2)$ sind ■ -

Die Koeffizienten $a_1(k), \dots, a_n(k)$ lassen sich aus folgender Beschreibung ermitteln:

$$\underline{A}'_B(k) = \underline{T}(k+1) \underline{A}'(k) \underline{T}^{-1}(k) \quad (3.15)$$

und mit der letzten Zeile von $\underline{T}(k+1)$ entsprechend (3.6), erhält man

$$\begin{bmatrix} x & \dots & x \\ \vdots & & \vdots \\ a_1(k), \dots, a_n(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & \dots & x \\ \vdots & & \vdots \\ \underline{c}^T \underline{A}'(k+n-1) \dots \underline{A}'(k+1) \end{bmatrix} \underline{A}'(k) \underline{T}^{-1}(k). \quad (3.16)$$

Daraus folgt

$$\begin{bmatrix} a_1(k), \dots, a_n(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{c}^T \underline{A}'(k+n-1) \dots \underline{A}'(k+1) \underline{A}'(k) \end{bmatrix} \underline{T}^{-1}(k). \quad (3.17)$$

Die Koeffizienten sind gebrochen rationale Funktionen, deren Zähler Produkte von Polynomen in $u(k), \dots, u(k)^n, u(k+1), \dots, u(k+1)^{n-1}, \dots, u(k+n-1)$ und deren Nenner durch die Determinante von $\underline{T}(k)$ gegeben sind, also Produkte von Polynomen in $u(k), \dots, u(k)^{n-1}, u(k+1), \dots, u(k+1)^{n-2}, \dots, u(k+n-2)$.

Bemerkung 3.2:

Aus (3.13) und den vorhergehenden Betrachtungen läßt sich erkennen, daß die Elemente von $\underline{b}_B(k)$ bei

$b_{B1}(k)$ eine reelle Zahl, bei
 $b_{B2}(k)$ ein Polynom ersten Grades in $u(k+1)$ und bei
 $\vdots$
 $b_{Bn}(k)$ Produkte von Polynomen ersten Grades
 $u(k+1), u(k+2), \dots, u(k+n-1)$

sind ■

3.1.1 Eingangs-Ausgangs-Beschreibung des Systems durch eine Differenzengleichung

Die kanonische Systemdarstellung im Zustandsraum nach (3.8)-(3.13), erlaubt eine einfache Herleitung der äquivalenten Eingangs-Ausgangs-Beschreibung des Systems. Aufgrund der besonderen Struktur der System-Matrix $\underline{A}'_B(k)$ und des Meßvektors $\underline{c}_B^T$, lassen sich die Elemente des Zustandsvektors als Funktionen der Ein- und Ausgangsgröße darstellen.

Deshalb soll die Eingangs-Ausgangs-Beschreibung des Systems aus der Beobachtbarkeits-Normalform abgeleitet werden und schreiben (3.8)-(3.13) als

$$\underline{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \\ a_1(k) & a_2(k) & \dots & \dots & a_n(k) \end{bmatrix} \underline{x}(k) + \begin{bmatrix} b_1(k) \\ b_2(k) \\ \vdots \\ b_n(k) \end{bmatrix} u(k) \quad (3.18)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} \underline{x}(k) , \quad (3.19)$$

was äquivalent ist zu

$$\begin{aligned} y(k+n) = & a_1(k)y(k) + a_2(k)\{y(k+1) - b_1(k)u(k)\} + \\ & + a_3(k)\{y(k+2) - b_2(k)u(k) - b_1(k+1)u(k+1)\} + \\ & + \dots + a_n(k)\{y(k+n-1) - b_{n-1}(k)u(k) - \dots - \\ & - b_1(k+n-2)u(k+n-2)\} + b_n(k)u(k) + \dots + \\ & + b_1(k+n-1)u(k+n-1). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Der kompakte Ausdruck der Eingangs-Ausgangs-Beschreibung des Systems lautet somit

$$y(k+n) = a_i(k)y(k+i-1) + \sum_{i=1}^n \beta_i(k)u(k+i-1) , \quad (3.21)$$

wobei

$$\beta_i(k) = b_{n-i+1}(k+i-1) - \sum_{j=i+1}^n a_j(k)b_{j-1}(k+i-1) \quad (3.22)$$

ist.

Die kanonische Systembeschreibung eines bilinearen Systems im Zustandsraum (3.18), (3.19) und seine Eingangs-Ausgangs-Beschreibung (3.21), (3.22), ist formal identisch mit der entsprechenden Beschreibung eines linearen zeitvarianten Systems.

Bei dem praktischen Gebrauch der Eingangs-Ausgangs-Beschreibung des Systems für die Identifikation ist es notwendig, genaue Kenntnisse über den mathematischen Zusammenhang der Koeffizienten $a_i(k)$ und $\beta_i(k)$ zu besitzen (siehe Bemerkung 3.1, 3.2).

Beispiel 3.1:

Gegeben sei das bilineare System mit der mathematischen Beschreibung

$$\begin{aligned} \underline{x}(k+1) &= \underline{A}^1(k) \underline{x}(k) + \underline{b} u(k) \\ &= \begin{bmatrix} 2 + u(k) & 3 + 2u(k) \\ 4 + 3u(k) & 5 + 4u(k) \end{bmatrix} \underline{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u(k) \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$y(k) = \underline{c}^T \underline{x}(k) \quad (3.24)$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 5 \end{bmatrix} \underline{x}(k) .$$

Gesucht wird die Transformationsmatrix $\underline{T}(k)$, so daß die mathematische Beschreibung (3.23), (3.24) in Beobachtbarkeits-Normalform vorliegt. Nach (3.6) wird sie wie folgt ausgelegt:

$$\underline{T}(k) = \begin{bmatrix} \underline{c}^T \\ \underline{c}^T \underline{A}'(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 28 + 19u(k) & 37 + 28u(k) \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

Damit erhält man die mathematische Beschreibung in Beobachtbarkeits-Normalform

$$\underline{x}_B(k+1) = \underline{A}'_B(k) \underline{x}_B(k) + \underline{b}_B(k) u(k) \quad (3.26)$$

$$y(k) = \underline{c}_B^T \underline{x}_B(k) \quad , \quad (3.27)$$

mit

$$\underline{A}'_B(k) = \underline{T}(k+1) \underline{A}'(k) \underline{T}^{-1}(k) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1(k) & a_2(k) \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

wobei

$$a_1(k) = \frac{(2 + 4u(k) + 2u^2(k)) (8 + 17u(k+1))}{(8 + 17u(k))} \quad (3.28a)$$

und

$$a_2(k) = \frac{56 + 121u(k) + 38u(k+1) + 85u(k+1)u(k)}{(8 + 17u(k))} \quad (3.28b)$$

ist. Ferner gilt nach (3.13)

$$\underline{b}_B(k) = \underline{T}(k+1) \underline{b} = \begin{bmatrix} 14 \\ 102 + 75u(k+1) \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

und

$$\underline{c}_g^T(k) = \underline{c}^T \underline{T}^{-1}(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.30)$$

Die Eingangs-Ausgangs-Beschreibung des Systems (3.26), (3.27) lautet

$$\begin{aligned} y(k+2) = & a_1(k)y(k) + a_2(k)y(k+1) + \\ & + (b_2(k) - a_2(k)b_1(k)) u(k) + \\ & + b_1(k+1)u(k+1) \quad , \end{aligned} \quad (3.31)$$

dementsprechend ergibt sich mit (3.28a)-(3.29)

$$\begin{aligned} (8 + 17u(k))y(k+2) = & ((2 + 4u(k) + 2u^2(k)) (8 + 17u(k+1)))y(k) + \\ & + (56 + 121u(k) + 38u(k+1) + 85u(k+1)u(k))y(k+1) + \\ & + ((102 + 75u(k+1)) (8 + 17u(k)) - \\ & - 14(56 + 121u(k) + 38u(k+1) + 85u(k+1)u(k)))u(k) + \\ & + (14(8 + 17u(k)))u(k+1) \quad . \end{aligned} \quad (3.32)$$

Der mathematische Aufwand ist beachtlich, um das bilineare System durch eine Eingangs-Ausgangs-Beschreibung darzustellen. Zur Beschreibung eines bilinearen Systems 2. Ordnung werden 16 Parameter benötigt. Bei einem System 3. Ordnung steigt die Zahl auf beachtliche 88 Parameter, usw. .

3.1.2 Eingangs-Ausgangs-Beschreibung des Systems durch eine Volterra-Reihe

Es bietet sich noch eine andere Möglichkeit an, um aus der bilinearen Zustandsgleichung die Eingangs-Ausgangs-Beschreibung zu ermitteln.

Bei diesem Verfahren wird die bilineare Zustandsgleichung (3.4) in Form einer linearen zeitvarianten Differenzengleichung gelöst und in die Ausgangsgleichung (3.2) eingesetzt.

Man erhält somit die Eingangs-Ausgangs-Beschreibung des Systems, die durch eine Volterra-Reihe

$$y(k) = \underline{c}^T \left[\underline{A}'(k-1)\underline{A}'(k-2) \dots \underline{A}'(k_0) \underline{x}_0 + \sum_{i=k_0}^{k-1} \underline{A}'(k-1)\underline{A}'(k-2) \dots \underline{A}'(i+1) \underline{b} u(i) \right] \quad (3.33)$$

dargestellt wird.

3.2 Spezielle Klassen der bilinearen Systeme

Das bilineare System nach (3.1)-(3.3) mit der Zustandsgleichung

$$\underline{x}(k+1) = \underline{A} \underline{x}(k) + \underline{N} \underline{x}(k)u(k) + \underline{b} u(k) \quad (3.34)$$

$$y(k) = \underline{c}^T \underline{x}(k) ; \quad \text{Rang } \underline{N} = n , \quad (3.35)$$

geht nach einer nichtsingulären Transformation

$$\underline{x}(k) = \underline{T} \underline{x}_B(k) \quad (3.36)$$

in ein äquivalentes Modell über. Es habe die beobachterkanonische Form

$$\underline{x}_B(k+1) = \underline{A}_B \underline{x}_B(k) + \underline{N}_B \underline{x}_B(k)u(k) + \underline{b}_B u(k) \quad (3.37)$$

$$y(k) = \underline{c}_B^T \underline{x}_B(k) , \quad (3.38)$$

wobei

$$\underline{A}_B := \underline{T}^{-1} \underline{A} \underline{T} = \begin{bmatrix} & & & \underline{I}_{n-1} \\ \underline{a} & & & \\ & & & \\ & & & \underline{0}^T \end{bmatrix} , \quad \underline{a} = [a_1, \dots, a_n]^T, \quad (3.39)$$

$$\underline{N}_B := \underline{T}^{-1} \underline{N} \underline{T} = [\underline{n}_{B1}, \underline{n}_{B2}, \dots, \underline{n}_{Bn}] , \quad (3.40)$$

$$\underline{b}_B := \underline{T}^{-1} \underline{b} , \quad (3.41)$$

und

$$\underline{c}_B^T := \underline{c}^T \underline{T} = [1, 0, \dots, 0] \quad (3.42)$$

ist.

Wie bei der bekannten Theorie linearer Systeme, wird die Transformationsmatrix $\underline{T}$ aus den Gleichungen (3.34)-(3.36) wie folgt bestimmt:

$$\underline{T} = \left[\underline{A}^{n-1} \underline{t}, \underline{A}^{n-2} \underline{t}, \dots, \underline{t} \right], \quad (3.43)$$

wobei $\underline{t}$ die erste Spalte der inversen Matrix

$$\underline{R}^{-1} = \begin{bmatrix} \underline{c}^T \underline{A}^{n-1} \\ \underline{c}^T \underline{A}^{n-2} \\ \vdots \\ \underline{c}^T \underline{A} \\ \underline{c}^T \end{bmatrix}^{-1} \quad (3.44)$$

ist.

Demnach kann die mathematische Beschreibung (3.34), (3.35) des zeitinvarianten bilinearen Einfachsystems, dann, und nur dann, auf die beobachterkanonische Form (3.37)-(3.38) transformiert werden, wenn die Matrix $\underline{R}$ regulär ist.

Im Gegensatz zum letzten Abschnitt 3.2, bleibt die Transformationsmatrix $\underline{T}$ zeitinvariant, und das gleiche gilt somit auch für die Parameter des transformierten Zustandsraummodells. Die entsprechende Eingangs-Ausgangs-Beschreibung des Systems enthält allerdings wieder Produkte von Polynomen in $u(k)u(k+1)$, usw., so daß die Komplexität mit der Ordnung des Systems erheblich wächst.

Mit einem Beispiel soll der Zusammenhang zwischen der Zustandsbeschreibung und der Eingangs-Ausgangs-Beschreibung des Systems zusätzlich zum Verständnis beitragen.

Beispiel 3.2:

Gegeben sei ein bilineares System 2. Ordnung (Rang $\underline{N} = n$)

$$\underline{x}(k+1) = \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 0 \end{bmatrix} \underline{x}(k) + \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{bmatrix} \underline{x}(k) u(k) + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u(k) \quad (3.45)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{x}(k) \quad (3.46)$$

Die bilineare Zustandsgleichung läßt sich in eine lineare zeitvariante Beschreibung umformen, und man erhält

$$\underline{x}(k+1) = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11}(k) & \tilde{a}_{12}(k) \\ \tilde{a}_{21}(k) & \tilde{a}_{22}(k) \end{bmatrix} \underline{x}(k) + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u(k) \quad (3.47)$$

mit

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{11}(k) &= a_1 + n_{11}u(k) \\ \tilde{a}_{12}(k) &= 1 + n_{12}u(k) \\ \tilde{a}_{21}(k) &= a_2 + n_{21}u(k) \\ \tilde{a}_{22}(k) &= n_{22}u(k) \end{aligned} \quad (3.48)$$

Entsprechend (3.31) lautet die Eingangs-Ausgangs-Beschreibung

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{12}(k)y(k+2) &= \{ \tilde{a}_{12}(k)\tilde{a}_{11}(k+1) + \tilde{a}_{11}(k+1)\tilde{a}_{22}(k) \} y(k+1) + \\ &+ \tilde{a}_{12}(k+1) \{ \tilde{a}_{12}(k)\tilde{a}_{21}(k) - \tilde{a}_{22}(k)\tilde{a}_{11}(k) \} y(k) + \\ &+ \tilde{a}_{12}(k+1) \{ \tilde{a}_{12}(k)b_2 - \tilde{a}_{22}(k)b_1 \} u(k) + \\ &+ \tilde{a}_{12}(k)b_2 u(k+1) \end{aligned} \quad (3.49)$$

Um das Auftreten der Produkte von Polynomen in $u(k)u(k+1)$... deutlicher zum Ausdruck zu bringen, wird (3.49) mit $a(k) = f\{u(k)\}$ allgemein wie folgt dargestellt:

$$\begin{aligned} (h_1 + d_1 u(k))y(k+2) = & (h_2 + d_2 u(k) + d_3 u(k+1) + d_4 u(k)u(k+1))y(k+1) + \\ & + (h_3 + d_5 u(k+1))(h_4 + d_6 u(k) + d_7 u^2(k))y(k) + \\ & + (h_3 + d_5 u(k+1))(h_5 + d_8 u(k) + d_9 u(k+1))u(k) + \\ & + (h_6 + d_{10} u(k))u(k+1) . \end{aligned} \quad (3.50)$$

Wie zu erwarten, verändert sich mit einer Transformation der Zustandsgleichung die Struktur der Eingangs-Ausgangs-Beschreibung nicht und hat somit die gleiche Form, wie in Abschnitt 3.2 gezeigt wurde.

3.2.1 Lineares System mit multiplikativer Verknüpfung des Ein- und Ausgangs

Für eine spezielle Klasse bilinearer Systeme läßt sich die Eingangs-Ausgangs-Beschreibung wesentlich vereinfachen.

Es wird von der anfangs beschriebenen Zustandsgleichung (3.34), (3.35)

$$\underline{x}(k+1) = \underline{A} \underline{x}(k) + \underline{N} \underline{x}(k)u(k) + \underline{b} u(k) \quad (3.51)$$

$$y(k) = \underline{c}^T \underline{x}(k) \quad (3.52)$$

ausgegangen, wobei diesmal mit

$$\underline{c}^T \neq \underline{0}^T \quad (3.53)$$

$$\text{Rang} \begin{bmatrix} \underline{N} \\ \underline{c}^T \end{bmatrix} = \text{Rang} \underline{N} = 1 \quad (3.54)$$

sei.

Die Annahme beinhaltet, daß jede Zeile $\underline{n}_i^T$ der Matrix $\underline{N}$ linear abhängig von $\underline{c}^T$ ist, d.h. :

$$\underline{n}_i^T = h_i \underline{c}^T \quad ; i \in \{1, n\} \quad (3.56)$$

bzw.

$$\underline{N} = \underline{h} \underline{c}^T . \quad (3.57)$$

Im Sinne dieser Betrachtungsweise erhält man mit der umgeformten $\underline{N}$ - Matrix folgende mathematische Beschreibung:

$$\underline{x}(k+1) = \underline{A} \underline{x}(k) + \underline{h} \underline{c}^T \underline{x}(k) u(k) + \underline{b} u(k) \quad (3.58)$$

und mit (3.52) ergibt sich mit

$$\underline{x}(k+1) = \underline{A} \underline{x}(k) + \underline{h} y(k) u(k) + \underline{b} u(k) , \quad (3.59)$$

ein lineares System mit multiplikativer Verknüpfung des Ein- und Ausgangs, deren Struktur Bild 3.1 zeigt.

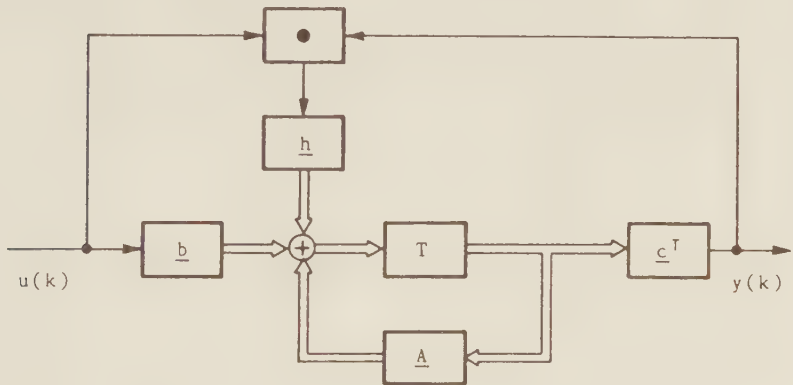


Bild 3.1: Lineares System mit multiplikativer Verknüpfung des Ein- und Ausgangs

Im Hinblick auf weitere theoretische Betrachtungen, soll die mathematische Beschreibung (3.58) ebenfalls auf eine beobachterkanonische Form transformiert werden.

Die Aufstellung der Transformationsmatrix geschieht in gleicher Weise nach (3.43), (3.44).

Mit der Zustandstransformation

$$\underline{x}(k) = \underline{T} \underline{x}_B(k) \quad (3.60)$$

erhält man die beobachterkanonische Form

$$\underline{x}_B(k+1) = \underline{T}^{-1} \underline{A} \underline{T} \underline{x}_B(k) + (\underline{T}^{-1} \underline{h}) (\underline{c}^T \underline{T}) \underline{x}_B(k) u(k) + \underline{T}^{-1} \underline{b} u(k) \quad (3.61)$$

$$y(k) = \underline{c}^T \underline{T} \underline{x}_B(k) . \quad (3.62)$$

Für den bilinearen Term gilt

$$\underline{N}_B = \underline{T}^{-1} \underline{N} \underline{T} = (\underline{T}^{-1} \underline{h}) (\underline{c}^T \underline{T}) , \quad (3.63)$$

wobei nach (3.42)

$$\underline{N}_B = \left[\underline{T}^{-1} \underline{h} \right] \left[1, 0, \dots, 0 \right] \quad (3.64)$$

$$\underline{N}_B = \left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix} n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_n \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ 0_{n,n-1} \end{matrix} \end{array} \right] . \quad (3.64a)$$

Die vollständige Darstellung der mathematischen Beschreibung (3.51), (3.52) lautet nach der Transformation auf die beobachterkanonische Form

$$\underline{x}_B(k+1) = \underline{A}_B \underline{x}_B(k) + \underline{N}_B \underline{x}_B(k) u(k) + \underline{b}_B u(k) \quad (3.65)$$

$$y(k) = \underline{c}_B^T \underline{x}_B(k) , \quad (3.66)$$

mit

$$\underline{A}_B = \left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ \underline{I}_{n-1} \end{matrix} & \begin{matrix} \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \hline \underline{a} & \underline{0}^T \end{array} \right] , \quad \underline{a} = \left[a_1, \dots, a_n \right]^T \quad (3.67)$$

$$\underline{N}_B = \left[\begin{array}{c|c} \underline{n} & \underline{0}_{n,n-1} \end{array} \right] , \quad \underline{n} = \left[n_1, \dots, n_n \right]^T \quad (3.68)$$

und

$$\underline{c}_B^T = \left[1, 0, \dots, 0 \right] , \quad (3.69)$$

deren Strukturdiagramm Bild 3.2 zeigt.

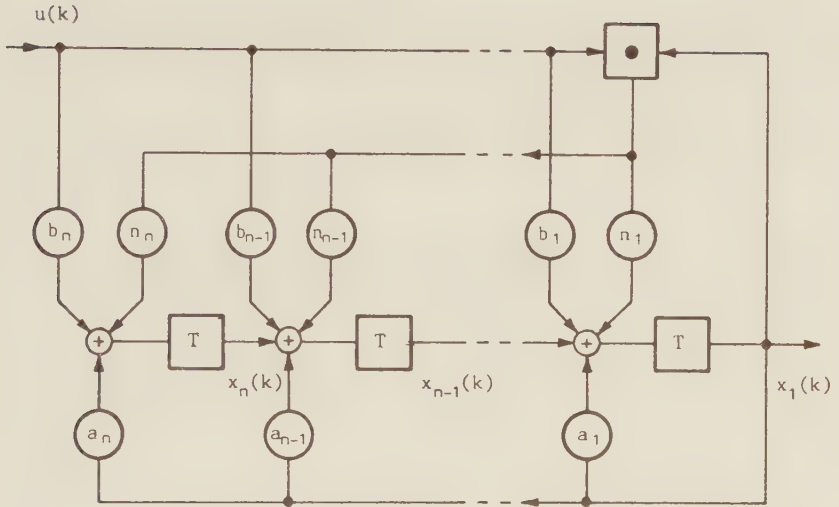


Bild 3.2: Strukturdiagramm eines bilinearen Einfachsystems in einer beobachterkanonischen Form nach (3.65), (3.66)

Zur Bestimmung der Eingangs-Ausgangs-Beschreibung wird die beobachterkanonische Form (3.65)-(3.69) wie folgt umgeschrieben

$$x_1(k+1) = x_2(k) + (a_1 + n_1 u(k))x_1(k) + b_1 u(k) \quad (3.70)$$

$$x_2(k+1) = x_3(k) + (a_2 + n_2 u(k))x_1(k) + b_2 u(k)$$

$$\vdots$$

(3.71)

$$x_n(k+1) = (a_n + n_n u(k))x_1(k) + b_n u(k)$$

und dementsprechend lauten (3.70), (3.71)

$$\begin{aligned}
 x_1(k+1) &= x_2(k) + (a_1 + n_1 u(k))x_1(k) + b_1 u(k) \\
 x_2(k) &= x_3(k-1) + (a_2 + n_2 u(k-1))x_1(k-1) + b_2 u(k-1) \\
 &\vdots \\
 x_n(k-n+2) &= (a_n + n_n u(k-n+1))x_1(k-n+1) + b_n u(k-n+1)
 \end{aligned}
 \tag{3.72}$$

Die (n-1) Gleichungen werden in (3.70) eingesetzt, und mit $x_1(k) = y(k)$ erhält man die Eingangs-Ausgangs-Beschreibung des bilinearen Einfachsystems (3.51)-(3.54)

$$\begin{aligned}
 y(k+1) &= \sum_{i=1}^n (a_i y(k+1-i) + n_i y(k+1-i)u(k+1-i) + \\
 &\quad + b_i u(k+1-i)) ,
 \end{aligned}
 \tag{3.73}$$

die gleichzeitig ein lineares System mit multiplikativer Verknüpfung des Ein- und Ausgangs beschreibt.

3.2.2 Lineares System mit multiplikativer Rückführung

Analog zum Abschnitt 3.2.1 hat T. Goka | 6 | eine Klasse bilinearer Systeme mit der mathematischen Beschreibung

$$\underline{x}(k+1) = (\underline{A} + u(k)\underline{N}) \underline{x}(k) + \underline{b} u(k) \quad (3.74)$$

vorgestellt, wobei

$$\underline{b} \neq 0, \quad (3.75)$$

und der

$$\text{Rang} \left[\begin{array}{c|c} \underline{N} & \underline{b} \end{array} \right] = \text{Rang } \underline{N} = 1 \quad (3.76)$$

ist.

Nach der vorhergehenden Betrachtungsweise läßt sich $\underline{N}$ zu

$$\underline{N} = \underline{b} \underline{h}^T \quad (3.77)$$

umformen, und die Zustandsgleichung (3.74) kann durch

$$\underline{x}(k+1) = \underline{A} \underline{x}(k) + \underline{b} \tilde{u}(k) \quad (3.78)$$

$$\tilde{u}(k) = u(k) (\underline{h}^T \underline{x}(k) + 1) \quad (3.79)$$

beschrieben werden.

Aus (3.78), (3.79) ist ersichtlich, wie diese Klasse bilinearer Systeme in ein lineares System mit multiplikativer Rückführung umgeformt werden kann (siehe Bild 3.3).

Ist der lineare Anteil des Systems (3.78) steuerbar, so kann es nach | 6 | auf folgende kanonische Zustandsbeschreibung

$$\underline{x}_R(k+1) = \underline{A}_R \underline{x}_R(k) + u(k) \underline{N}_R \underline{x}_R(k) + \underline{b}_R u(k) \quad (3.80)$$

mit

$$\underline{A}_R = \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{1} & \underline{I}_{n-1} \\ \hline & & \underline{a}^T \end{bmatrix}, \quad \underline{a}^T = [a_1, \dots, a_n] \quad (3.81)$$

$$\underline{N}_R = \begin{bmatrix} \underline{0}_{n-1, n} \\ \hline \underline{n}^T \end{bmatrix}, \quad \underline{n}^T = [n_1, \dots, n_n] \quad (3.82)$$

und

$$\underline{b}_R = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.83)$$

transformiert werden.

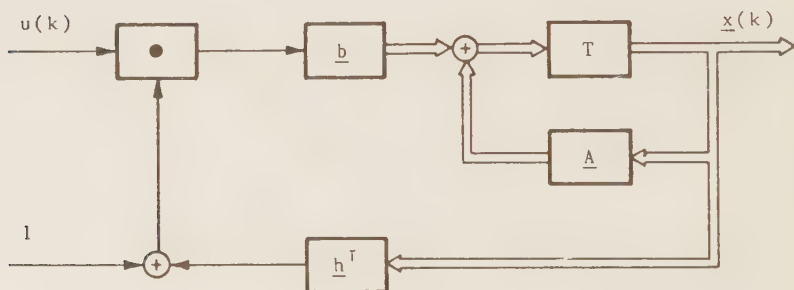


Bild 3.3: Lineares System mit multiplikativer Rückführung

Die Möglichkeit, das bilineare System als ein lineares System mit multiplikativer Rückführung darzustellen, wurde von R.S. Baheti [7] aufgegriffen.

Ist der lineare Anteil des Systems vollständig beobachtbar, so kann die Zustandsbeschreibung auf die Form

$$\underline{x}(k+1) = \underline{A} \underline{x}(k) + u(k) \underline{N} \underline{x}(k) + \underline{b} u(k) \quad (3.84)$$

$$y(k) = \underline{c}^T \underline{x}(k), \quad (3.85)$$

mit

$$\underline{A} := \begin{bmatrix} 0 & | & \underline{I}_{n-1} \\ \hline & & \\ \underline{a}^T & & \end{bmatrix}, \quad \underline{a}^T = [a_1, \dots, a_n] \quad (3.86)$$

$$\underline{b}^T := [b_1, b_2, \dots, b_n] \quad (3.87)$$

und

$$\underline{c}^T := [1, 0, \dots, 0] \quad (3.88)$$

transformiert werden, ferner wird vorausgesetzt, daß

$$\text{Rang } \underline{N} = 1, \quad (3.89)$$

und die Form

$$\underline{N} := \begin{bmatrix} 0_{n-1,n} \\ \hline \underline{n}^T \end{bmatrix}, \quad \underline{n}^T = [n_1, \dots, n_n] \quad (3.90)$$

hat.

Bei dieser Darstellung wird nicht vorausgesetzt, daß der Rang $[\underline{N} | \underline{b}] = 1$ ist. Bild 3.4 zeigt das Strukturdiagramm dieses Systems.

Es ist anzumerken, daß es zwischen dem bilinearen System (3.84)-(3.90) und dem linearen System in Beobachtbarkeits-Normalform bei den ersten (n-1) Zuständen keinen Unter-

schied im Aufbau gibt. Nur der n-te Zustand unterscheidet sich durch die zusätzliche Addition der bilinearen Terme auf den Eingang.

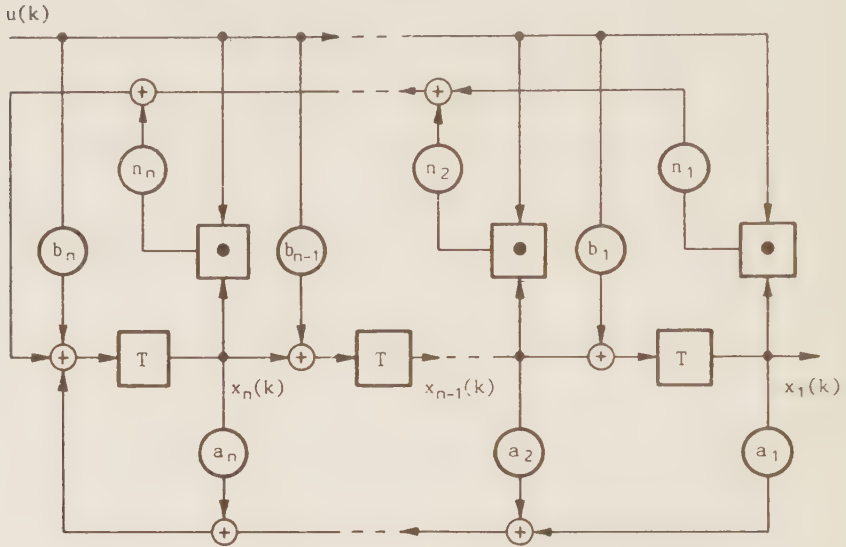


Bild 3.4: Strukturdiagramm eines bilinearen Einfachsystems nach der mathematischen Beschreibung (3.84) - (3.90)

Für die, aus der Zustandsgleichung (3.84)-(3.90) ermittelte, Eingangs-Ausgangs-Beschreibung des Systems gilt:

$$y(k+n) = \underline{a}^T \underline{y}(k, k+n-1) + \underline{n}^T \underline{y}(k, k+n-1) u(k) + \\ + \underline{g}^T \underline{u}(k, k+n-1) + \underline{f}^T \underline{u}(k, k+n-1) u(k) \quad , \quad (3.91)$$

mit

$$\underline{u}^T(k, k+n-1) := \left[u(k), \dots, u(k+n-1) \right], \quad (3.92)$$

$$\underline{y}^T(k, k+n-1) := \left[y(k), \dots, y(k+n-1) \right], \quad (3.93)$$

$$\underline{a}^T := \left[a_1, a_2, \dots, a_n \right], \quad (3.94)$$

und

$$\underline{n}^T := \left[n_1, n_2, \dots, n_n \right]. \quad (3.95)$$

Ferner gilt

$$\underline{g} := \underline{T}_1 \underline{b} \quad (3.96)$$

$$\underline{T}_1 := \begin{bmatrix} -a_2 & -a_3 & \dots & -a_n & 1 \\ -a_3 & -a_4 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -a_n & 1 & \dots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.97)$$

und

$$\underline{f} := \underline{T}_2 \underline{b} \quad (3.98)$$

$$\underline{T}_2 := \begin{bmatrix} -b_2 & -b_3 & \dots & -b_n & 0 \\ -b_3 & -b_4 & \dots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -b_n & 1 & \dots & 1 & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.99)$$

3.3 Beispiel: Zweitank-System

Nach der vorangegangenen Theorie soll jetzt der praktische Einsatz dieser speziellen Klassen aufgezeigt werden. Darunter sollte man nicht verstehen, daß mit bewußt oder unbewußt gutmütig konstruierten Beispielen wunderbare Ergebnisse vorgezeigt werden. Die Vor- und Nachteile lassen sich meistens erst nach der Anwendung auf viele praktische Systeme richtig einschätzen.

Bei dem nachfolgenden Beispiel werden die entwickelten bilinearen Zustandsgleichungen als eine sinnvolle Ergänzung zu den linearen bzw. linearisierten Gleichungen verstanden.

Als praktisches Beispiel wird ein Zweitank-System nach Bild 3.5 mit Zuflüssen und Abflüssen näher betrachtet.

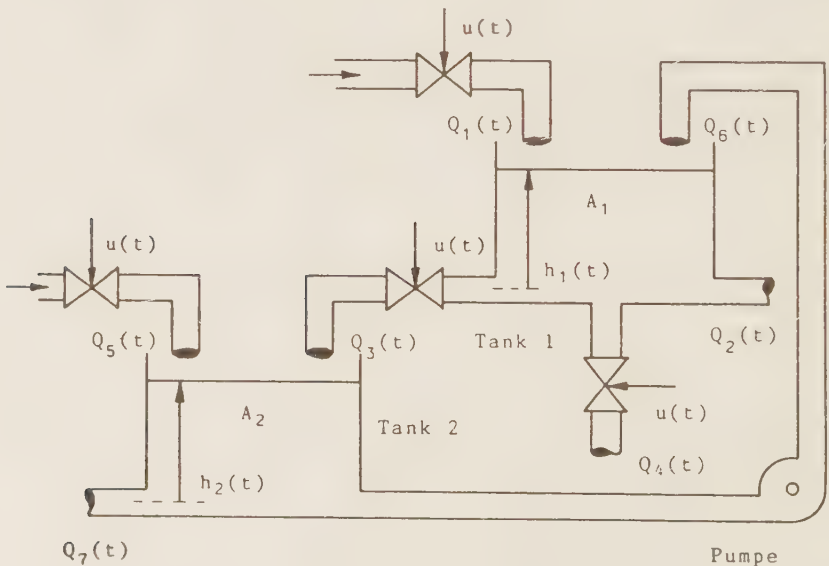


Bild 3.5: Blockschema eines Zweitank-Systems

Die pro Zeiteinheit aus der Leitung ausfließende Wassermenge $Q_1(t)$, $Q_5(t)$ wird, bei konstantem Druck, durch ein Ventil gesteuert. Für das Ventil gilt näherungsweise, daß der Durchfluß der Stellung der Ventilspindel proportional ist, d.h.

$$Q_1(t) = k_1 u(t) \quad (3.100)$$

und

$$Q_5(t) = k_5 u(t) \text{ , mit } k_1, k_5 > 0, u(t) \geq 0. \quad (3.101)$$

Für die inkompressible Flüssigkeit, die nur aufgrund ihres Gewichtes abfließt, sei der Volumenstrom $Q_2(t)$, $Q_7(t)$ proportional zur Wasserhöhe, es gilt

$$Q_2(t) = c_2 h_1(t) \quad (3.102)$$

und

$$Q_7(t) = c_7 h_2(t) \text{ , mit } c_2, c_7 > 0. \quad (3.103)$$

Dabei wird vorausgesetzt, daß der Abflußquerschnitt sehr viel kleiner, als der Querschnitt A der Behälter ist. Bei den Abflüssen, die durch ein Ventil geregelt werden, ist der Volumenstrom Q zusätzlich von dem Ventilhub abhängig, so daß

$$Q_3(t) = d_3 u(t) h_1(t) \quad (3.104)$$

und

$$Q_4(t) = d_4 u(t) h_1(t) \text{ , mit } d_3, d_4 > 0. \quad (3.105)$$

Die Pumpe erzeugt einen Volumenstrom. Entgegen diesem Strom wirkt die Differenz der Volumenströme, die durch den Staudruck am Pumpeneingang und -ausgang entstehen. Es wird angenommen, daß der von der Pumpe erzeugte Druck von dem Staudruck am Ausgang kompensiert wird. Der Volumenstrom $Q_6(t)$ ist somit nur noch von der Füllhöhe in

Tank 2 abhängig, die den Staudruck am Pumpeneingang erzeugt, dies bedeutet

$$Q_6(t) = c_6 h_2(t) , \text{ mit } c_6 > 0. \quad (3.106)$$

Für die Volumen der Tanks gilt

$$V_1(t) = A_1 h_1(t) , \quad (3.107)$$

$$V_2(t) = A_2 h_2(t) \quad (3.108)$$

und für die Volumenänderung erhält man

$$\dot{V}_1(t) = Q_1(t) + Q_6(t) - Q_2(t) - Q_3(t) - Q_4(t), \quad (3.109)$$

$$\dot{h}_1(t) = 1/A_1 \{ k_1 u(t) + c_6 h_2(t) - c_2 h_1(t) - (d_3 + d_4) u(t) h_1(t) \}, \quad (3.110)$$

$$\dot{V}_2(t) = Q_3(t) + Q_5(t) - Q_6(t) - Q_7(t) \quad (3.111)$$

und

$$\dot{h}_2(t) = 1/A_2 \{ d_3 u(t) h_1(t) + k_5 u(t) - (c_6 + c_7) h_2(t) \}. \quad (3.112)$$

Die Zustandsbeschreibung lautet somit

$$\begin{aligned} \dot{\underline{h}}(t) = & \begin{bmatrix} -c_2/A_1 & c_6/A_1 \\ 0 & -(c_6 + c_7)/A_2 \end{bmatrix} \underline{h}(t) + \\ & + u(t) \begin{bmatrix} -(d_3 + d_4)/A_1 & 0 \\ d_3/A_2 & 0 \end{bmatrix} \underline{h}(t) + \\ & + \begin{bmatrix} k_1/A_1 \\ k_5/A_2 \end{bmatrix} u(t) \end{aligned} \quad (3.113)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} c_2 & 0 \end{bmatrix} \underline{h}(t). \quad (3.114)$$

Nach der Transformation von (3.113), (3.114) erhält man die beobachterkanonische Form

$$\begin{aligned} \dot{\underline{\tilde{h}}}(t) = & \begin{bmatrix} -\frac{c_2 A_2 + (c_6 + c_7) A_1}{A_1 A_2} & 1 \\ -\frac{(c_6 + c_7) c_2}{A_1 A_2} & 0 \end{bmatrix} \underline{\tilde{h}}(t) + \\ & + u(t) \begin{bmatrix} -(d_3 + d_4) A_1 & 0 \\ \frac{(c_6 + c_7)(d_3 + d_4) c_6 d_3}{A_1 A_2} & 0 \end{bmatrix} \underline{\tilde{h}}(t) + \\ & + \begin{bmatrix} c_2 k_1 / A_1 \\ \frac{c_2 (k_1 (c_6 + c_7) + k_5 c_6)}{A_1 A_2} \end{bmatrix} u(t) \end{aligned} \quad (3.115)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{\tilde{h}}(t) \quad (3.116)$$

3.4 Abschließende Betrachtung bilinearer System- beschreibungen

In den vorangegangenen Abschnitten wurden verschiedene Möglichkeiten vorgestellt, wie sich ein bilineares System durch eine Eingangs-Ausgangs-Beschreibung darstellen läßt. Es soll nun abschließend eine Betrachtung der einzelnen Beschreibungen, im Hinblick auf Anwendung verschiedener Identifikationsverfahren, angestellt werden.

Bei der Darstellung des bilinearen Systems durch eine Volterra-Reihe wird der Zusammenhang zwischen der Eingangs- und Ausgangsgröße in Form von Funktionen dargestellt. In diesen Funktionen sind die Systemparameter implizit enthalten und lassen sich deswegen nur bedingt daraus ermitteln. Dies bedeutet, daß die Eingangs-Ausgangs-Beschreibung nicht auf die Zustandsraum-Beschreibung zurückführt.

An einem praktischen Beispiel zeigte R.S. Baheti | 8 | mit Hilfe der Korrelationsanalyse und Methode der kleinsten Quadrate, daß die Systemparameter nur bedingt ermittelbar sind.

Bei der Darstellung des bilinearen Systems durch eine Differenzengleichung wird davon ausgegangen, daß das System vollständig beobachtbar ist. Durch die Transformation auf Beobachtbarkeits-Normalform werden die Systemparameter zu gebrochen rationalen Funktionen, deren Zähler und Nenner Produkte von Polynomen in $u(k), u(k+1), \dots$, usw. sind. Somit ist auch bei dieser Beschreibungsform keine Rücktransformation auf die ursprüngliche zeitinvariante bilineare Zustandsraum-Beschreibung möglich. Man erhält bei der Rücktransformation ein zeitvariantes lineares System, bei dem die Systemparameter Produkte von Polynomen in $u(k), u(k+1), \dots$, usw. enthalten.

Für die Identifikation bedeutet diese Beschreibung einen erheblichen Rechenaufwand. Von Baghelli und Guidorzi [5] wurde eine abgewandelte Methode der kleinsten Quadrate verwendet, wobei für ein System 2. Ordnung 16 und für ein System 3. Ordnung schon beachtliche 88 Parameter identifiziert werden müssen.

Die im Abschnitt 3.2 vorgestellten Eingangs-Ausgangs-Beschreibungen stellen Sonderfälle der bilinearen Systeme dar. Es wird von einer kanonischen Form ausgegangen, bei der die Systemparameter der Zustandsraum-Beschreibung zeitinvariant sind. Nach der Transformation auf die Eingangs-Ausgangs-Beschreibung, bleiben die systembeschreibenden Parameter weiterhin zeitinvariant und sind explizit in der Gleichung enthalten. Aufgrund dieser Tatsache, kann aus der Eingangs-Ausgangs-Beschreibung die zeitinvariante bilineare Zustandsraum-Beschreibung direkt abgeleitet werden.

Es existieren zahlreiche praktische Anwendungsbeispiele [1] für diese speziellen Klassen bilinearer Systeme. So wurde von R.S. Baheti [7] ein nukleares Spaltungsmodell mit Hilfe der Korrelationsanalyse identifiziert.

4. Identifikation bilinearer Systeme

Die großen Fortschritte in der Herstellung preiswerter Mikrorechner lassen die Implementierung von komplexen Identifikations- und Regelalgorithmen zu, deren Verwirklichung mittels analoger Technik nur mit einem nicht vertretbarem Aufwand (oder überhaupt nicht) möglich war. Aus diesen Gründen hat das Interesse an adaptiven Algorithmen in den letzten Jahren generell zugenommen.

Die Aufmerksamkeit auf diesem Gebiet, die den bilinearen Systemen bisher in der regelungstechnischen Praxis gewidmet wurde, nimmt sich gegenüber den Vorzügen, die sie besitzen, bescheiden aus.

Zwar gibt es Mitte der 70er Jahre Arbeiten zu dem Themenkreis Identifikation von bilinearen Systemen, aber eine allgemein geschlossene Lösung des Identifikationsproblems dieser Systeme existiert zur Zeit noch nicht. Die Zahl der Veröffentlichungen zu kleinen, aber wichtigen Teilaspekten der Identifikation, beschränkt sich meist auf spezielle Fälle.

4.1 Übersicht

In dem Abschnitt 3.4 wurden schon einige spezielle Identifikationsverfahren angesprochen. Eine ausführliche Behandlung der Identifikation bilinearer Systeme stellte Mohler | 4 | in einem Übersichtsaufsatz 1980 vor. Noch zu erwähnen seien deshalb Aufsätze neueren Datums.

So geht Kubrusly | 9 | 1981 von einem bilinearen System aus, bei dem die Ein- und Ausgänge gestört sind. Mit einem Algorithmus nach der Methode der 'Stochastischen Approximation' werden die Systemparameter geschätzt. Dabei wird allerdings vorausgesetzt, daß alle Zustände zugänglich sind.

S. Svoronos | 10 | 1981 stellte in seiner Arbeit eine Kombination der 'least squares' Parameter-Identifikationsmethode mit einem Regler minimaler Varianz vor. Er ging von einer angenommenen Eingangs-Ausgangs-Beschreibung für diskrete bilineare Systeme aus, die nicht aus der Zustandsraum-Beschreibung hergeleitet wurde.

Bei einem in jüngster Zeit veröffentlichten Aufsatz von C.B. Smith | 11 | 1983 wird das bilineare System durch eine Volterra-Reihe beschrieben und davon ausgehend, werden die Eigenwerte des Systems identifiziert.

Über adaptive Identifikationsverfahren mit Bezugsmodell bei bilinearen Systemen wird wenig berichtet. 1978 entstand ein in Japan veröffentlichter Aufsatz von T. Soeda | 12 |. Er behandelt die Parameter-Identifikation eines zeitdiskreten bilinearen Systems mit Hilfe der 'Model Reference Adaptive Technique'. Das Modell wird im Zustandsraum dargestellt, und alle Systemzustände müssen messbar sein.

1983 stellten F. Ohkawa und Y. Yonezawa [13] ein Modellreferenzverfahren für diskrete bilineare Systeme nach (3.73) vor. Das entsprechende Bezugsmodell lautete:

$$\hat{y}(k+1) = \sum_{i=1}^n \{ a_i(k)y(k+1-i) + n_i(k)y(k+1-i)u(k+1-i) + b_i(k)u(k+1-i) \} \quad (4.1)$$

Aus (4.1) wird die Eingangsgröße

$$u(k) = \{ n_1(k)y(k) + b_1(k) \}^{-1} \left(\hat{y}(k+1) - \sum_{i=1}^n a_i(k)y(k+1-i) - \sum_{i=2}^n n_i(k)y(k+1-i)u(k+1-i) + b_i(k)u(k+1-i) \right) \quad (4.2)$$

abgeleitet, und das gewünschte Ausgangsverhalten $\hat{y}(k+1)$ wird vorgegeben. Es wurde gezeigt, wie mit einem einfachen Adaptionsverfahren der Systemausgang gegen den Modellausgang konvergiert. Für den Adaptionsalgorithmus werden nur die zur Verfügung stehenden Ein- und Ausgangsdaten benötigt. Es werden keine erwarteten Werte über den Systemausgang, oder Informationen über die unbekannten Systemparameter benötigt.

Ebenfalls 1983 wurde von A. Lippel und P. Lopez [14] ein adaptiver Beobachter für bilineare Systeme nach (3.84)-(3.90) entworfen. Der vorgeschlagene Beobachter hat folgende Form:

$$\hat{\underline{x}}(k+1) = \underline{A}(k)\hat{\underline{x}}(k) + u(k)\underline{N}(k)\hat{\underline{x}}(k) + \underline{b}(k)u(k) + \underline{\xi}(k) \quad (4.3)$$

$$\hat{y}(k) = \begin{bmatrix} 1, 0, \dots, 0 \end{bmatrix} \hat{\underline{x}}(k) \quad (4.4)$$

wobei

$$\underline{A}(k) = \begin{bmatrix} \underline{0} & \vdots & \underline{I}_{n-1} \\ \hline & & \\ & & \\ \underline{a}^T & & \end{bmatrix}, \quad \underline{a}^T = [a_1, \dots, a_n] \quad (4.5)$$

$$\underline{N}(k) = \begin{bmatrix} \underline{0}_{n-1,n} \\ \hline \\ \underline{n}^T \end{bmatrix}, \quad \underline{n}^T = [n_1, \dots, n_n] \quad (4.6)$$

und

$$\underline{b}^T(k) = [b_1(k), \dots, b_n(k)] \quad (4.7)$$

$$\underline{\xi}^T(k) = [\xi_1(k), \dots, \xi_n(k)] \text{ ist.} \quad (4.8)$$

Das Identifikationsverfahren basiert ebenfalls auf der 'Model Reference Adaptive Technique'.

Die Übersicht macht deutlich, wie vielfältig das Identifikationsproblem gelöst wird. Es lassen sich keine gemeinsamen Bewertungskriterien aufstellen, die für ein Verfahren sprechen. Welches Verfahren bevorzugt werden soll, ist beim einzelnen Fall abhängig von dem praktischen System und der damit verbundenen Aufgabenstellung.

4.1.1 Adaptive Identifikationsverfahren

Bei dem herkömmlichen Entwurf von Regelalgorithmen, geht man in den meisten Fällen von einem dynamischen System aus, dessen mathematische Beschreibung vollständig bekannt ist. In der Praxis wird diese Bedingung in der Regel nicht erfüllt. Darüber hinaus sind die für den Regelalgorithmus benötigten Systemzustände sehr häufig nicht meßbar. Diese Schwierigkeit wird umgangen, indem man mit Hilfe eines Zustandsbeobachters die Systemzustände rekonstruiert. Voraussetzung dafür ist allerdings, daß der Systemeingang und -ausgang zugänglich und die Struktur des Systems, sowie die Systemparameter bekannt sind.

Für den Entwurf von Zustandsbeobachtern ist es somit erforderlich, die Parameter des Systems vorher experimentell zu ermitteln. Alternativerweise kann man mit Hilfe sogenannter adaptiver Beobachter, die seit den 70er Jahren Gegenstand der systemtheoretischen Forschung darstellen, gleichzeitig die Systemparameter und die Systemzustände schätzen.

Die Theorie der adaptiven Beobachter erfaßt zur Zeit fast ausschließlich lineare Systeme. Dabei erlangte die direkte Methode nach Ljapunov für den Entwurf von adaptiven Regel- und Identifikationsverfahren zunehmend an Bedeutung. Nach dieser Methode wird bei der Auslegung des Adaptionsalgorithmus das Stabilitätsproblem des Gesamtsystems gleich mitgelöst, das bei anderen Verfahren nicht unbedingt der Fall ist.

Bei der folgenden Übersicht linearer adaptiver Verfahren sollen die Methoden nur kurz vorgestellt werden, die anschließend als Grundlage für die Entwicklung bilinearer Systeme dienen. Erst in den nachfolgenden Abschnitten wird umfassend auf die einzelnen Verfahren eingegangen.

I.S. Pazdera und H.J. Pottinger | 15 | sowie P. Kudva und K. Narendra | 16 | waren unter den ersten, die mit Hilfe der direkten Methode von Ljapunov, den Entwurf eines Systems mit adaptiven Bezugsmodell vorstellten. Das Verfahren kann allerdings nur bedingt für den praktischen Gebrauch verwendet werden, da die Methode die Zugänglichkeit aller Zustandsvariablen voraussetzt.

Das Konzept eines adaptiven Beobachters für kontinuierliche Einfachsysteme wurde zuerst von R. Carroll und D. Lindorff | 17 | vorgestellt. Andere Entwurfsverfahren für kontinuierliche und diskrete lineare Systeme folgten bald (Lüder und Narendra 1973 | 18 | , Kudva und Narendra 1973 | 19 | , Anderson 1974 | 20 | , Suzuki und Andoh 1977 | 21 | , Ichikawa 1980 | 22 |).

Viele der adaptiven Beobachter werden aus der direkten Methode von Ljapunov oder dem Theorem von Popov abgeleitet.

G. Kreisselmeier | 23 | entwickelte 1977 den Typ eines parametrisierten adaptiven Beobachters für ein kontinuierliches lineares Einfachsystem. Das Adaptionsgesetz basiert auf einem exponentiell gewichteten Integral- Gütekriterium, so daß die Konvergenzgeschwindigkeit fast beliebig schnell ausgelegt werden kann.

Die diskrete Version wurde 1980 von T. Suzuki | 24 | vorgestellt. Das Adaptionsgesetz wird durch einen Satz rekursiver Gleichungen dargestellt und beruht auf einer exponentiell gewichteten Methode der kleinsten Quadrate.

5. Identifikation zeitdiskreter bilinearer Mehrfachsysteme

5.1 Identifikation nach der direkten Methode von Ljapunov

Basierend auf der direkten Methode von Ljapunov stellten Kudva und Narendra [25.] ein adaptives Identifikationsverfahren für zeitdiskrete Mehrfachsysteme vor.

In der vorliegenden Arbeit wird ein abgewandeltes Verfahren für die Identifikation bilinearer Systeme unter der Voraussetzung angewendet, daß die Zustandsvariablen des Systems meßbar sind, und auf das System keine äußeren Störungen einwirken.

Das zeitdiskrete bilineare System sei vollständig steuerbar und durch die Zustandsgleichung nach (2.2)

$$\underline{x}(k+1) = \underline{A}^* \underline{x}(k) + \underline{B}^* \underline{u}(k) + \sum_{i=1}^p u_i(k) \underline{N}_i^* \underline{x}(k) \quad (5.1)$$

beschrieben, bei der die $(n \times n)$ Elemente der Matrizen $\underline{A}^*$, $\underline{N}_i^*$ ($i = 1, \dots, p$), sowie die $(n \times m)$ Elemente der Matrix $\underline{B}^*$ unbekannt sind. Die Elemente sind zeitinvariant.

Das Modell wird in entsprechender Form

$$\begin{aligned} \hat{\underline{x}}(k+1) = & \underline{A}(k+1) \underline{x}(k) + \underline{B}(k+1) \underline{u}(k) + \\ & + \sum_{i=1}^p u_i(k) \underline{N}_i(k+1) \underline{x}(k) \end{aligned} \quad (5.2)$$

dargestellt, mit dessen Hilfe die Parameter des gegebenen Systems bestimmt werden.

Es stellt sich die Aufgabe, einen Identifikationsalgorithmus zu entwerfen, der das Ziel hat, die Modellparameter denen des Systems anzugleichen, gleichzeitig geht dabei der Fehler zwischen den System- und Modellzuständen gegen Null.

Dies bedeutet:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \underline{A}(k) = \underline{A}^* , \quad (5.3)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \underline{B}(k) = \underline{B}^* \quad (5.4)$$

und

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \underline{N}_i(k) = \underline{N}_i^* , \quad i \in \{1, p\} . \quad (5.5)$$

Hieraus folgt für den Zustandsfehler

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \underline{e}(k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \{ \underline{\hat{x}}(k) - \underline{x}(k) \} = \underline{0} . \quad (5.6)$$

Mit den Parameterfehler-Matrizen

$$\underline{\Phi}(k) \equiv \underline{A}(k) - \underline{A}^* , \quad (5.7)$$

$$\underline{\Psi}(k) \equiv \underline{B}(k) - \underline{B}^* \quad (5.8)$$

und

$$\underline{\Gamma}_i(k) \equiv \underline{N}_i(k) - \underline{N}_i^* , \quad i \in \{1, p\} \quad (5.9)$$

erhält man in Anlehnung an (5.1)-(5.9) den Zustandsfehler

$$\begin{aligned} \underline{e}(k+1) &= \underline{\Phi}(k+1)\underline{x}(k) + \underline{\Psi}(k+1)\underline{u}(k) + \\ &+ \sum_{i=1}^p u_i(k) \underline{\Gamma}_i(k+1)\underline{x}(k) , \end{aligned} \quad (5.10)$$

oder anders geschrieben

$$\underline{e}(k) = \underline{R}(k) \underline{z}(k-1) , \quad (5.11)$$

mit

$$\underline{R}(k) := \left[\begin{array}{c|c|c} \underline{\Phi}(k) & \underline{\Psi}(k) & \underline{\Gamma}_1(k), \dots, \underline{\Gamma}_p(k) \end{array} \right] \quad (5.12)$$

und

$$\underline{z}^T(k) := \left[\begin{array}{c|c|c} \underline{x}^T(k) & \underline{u}^T(k) & u_1(k)\underline{x}^T(k), \dots, u_p(k)\underline{x}^T(k) \end{array} \right]. \quad (5.13)$$

Für die weiteren Betrachtungen erweist es sich als zweckmäßig, den Zustandsfehler-Vektor nach (5.11) komponentenweise darzustellen, der wie folgt geschrieben werden kann

$$e_i(k) = \underline{r}_i^T(k) \underline{z}(k-1) \quad , \quad i \in (1, n) \quad , \quad (5.14)$$

wobei $\underline{r}_i^T(k)$ die i -te Zeile der Matrix $\underline{R}(k)$ ist.

5.1.1 Entwicklung des Adaptionalgorithmus

Das Identifikationsproblem kann auf ein Minimierungsproblem zurückgeführt werden. Zu diesem Zweck wird ein Gütekriterium

$$J(\underline{e}(\underline{r}_i(k))) = \frac{1}{2} \underline{e}^T(k) \underline{e}(k) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n e_i^2(k) \quad (5.15)$$

gebildet, das ein eindeutiges Minimum bei $\underline{r}_i(k) = \underline{0}$ hat. Dies gilt allerdings nur, wenn nach (5.14) $\underline{r}_i(k)$ zu $\underline{z}(k-1)$ nicht orthogonal ist, da sonst

$$e_i(k) = \underline{r}_i^T(k) \underline{z}(k-1) = 0, \quad i \in \{1, n\} \quad (5.16)$$

ist obwohl $\underline{r}_i^T(k) \neq \underline{0}$.

Die Minimierung des Gütekriteriums (5.15)

$$\text{Min} \{ J(\underline{e}(\underline{r}_i(k))) \}, \quad i \in \{1, n\} \quad (5.17)$$

kann mit Hilfe der Gradientenmethode realisiert werden. Die Methode besteht darin, das Gütekriterium entlang seiner Richtung zu minimieren, d.h.

$$\underline{r}_i^T(k+1) = \underline{r}_i^T(k) - \varepsilon(k) \frac{\partial J(\underline{e}(\underline{r}_i(k)))}{\partial \underline{r}_i^T(k)}, \quad (5.18)$$

$$i \in \{1, n\},$$

wobei $\varepsilon(k)$ eine positive Größe ist und als Verstärkungsfaktor bezeichnet wird.

Das Adaptionsgesetz lautet somit unter der Verwendung von von (5.14)-(5.15)

$$\underline{r}_i^T(k+1) = \underline{r}_i^T(k) - \varepsilon(k) \frac{\partial}{\partial \underline{r}_i^T(k)} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n (\underline{r}_l^T(k) \underline{z}(k-1))^2 \right\} \quad (5.19)$$

$$\underline{r}_i^T(k+1) = \underline{r}_i^T(k) - \varepsilon(k) \underline{e}_i(k) \underline{z}^T(k-1) , \quad (5.20)$$

$$i \in \{1, n\} \quad .$$

Die einzelnen Zeilenvektoren $\underline{r}_i^T(k)$ werden zu $\underline{R}(k)$ zusammengefaßt, dies ergibt

$$\underline{R}(k+1) = \underline{R}(k) - \varepsilon(k) \underline{e}(k) \underline{z}^T(k-1) . \quad (5.21)$$

5.1.2 Stabilitätsnachweis

Bei der Aufstellung des Adaptionalgorithmus (5.21) blieb die Stabilität zunächst unberücksichtigt.

Für den Nachweis der asymptotischen Stabilität, steht als hinreichende Bedingung die Ljapunovmethode zur Verfügung. Man verwendet dabei positive definite Funktionen $V(\underline{x}, k)$, d.h. :

$$V(\underline{x}, k) > 0 \quad \text{für } \underline{x}(k) \neq \underline{0} \text{ und } V(\underline{0}, k) = 0 . \quad (5.22)$$

Definition 5.1: | 26 |

Die Ruhelage $\underline{x}_r = \underline{0}$ des zeitinvarianten diskreten Systems

$$\underline{x}(k+1) = \underline{f}(\underline{x}(k), k) \quad (5.23)$$

ist asymptotisch stabil, wenn es zu einer positiv definierten Funktion $V(\underline{x}, k)$ in einer Umgebung $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ der Ruhelage eine negative definite erste Differenz gibt, d.h. :

$$\Delta V(\underline{x}, k) = V(\underline{x}, k+1) - V(\underline{x}, k) < 0 \quad (5.24)$$

für alle $\underline{x}(k) \in \Omega, (\underline{x}(k) \neq \underline{0})$.

Gilt $V(\underline{x}, k) > 0$ für $\underline{x}(k) \neq \underline{0}$, $V(\underline{0}, k) = 0$ und ist $\Delta V(\underline{x}, k) \leq 0$ für alle $\underline{x}(k)$ in Ω , so liegt Ljapunov-Stabilität vor ■

Als Ansatz für eine Ljapunovfunktion genügt die positiv definite Funktion

$$V(\underline{r}_i, k) = \sum_{i=1}^n \underline{r}_i^T(k) \underline{r}_i(k) > 0 , \text{ für } \underline{r}_i(k) \neq 0, \quad (5.25) \\ V(\underline{0}, k) = 0.$$

Liegt asymptotische Stabilität vor, so muß nach Definition 5.1

$$\Delta V(\underline{r}_i, k) = V(\underline{r}_i, k+1) - V(\underline{r}_i, k) < 0 \quad (5.26)$$

sein.

Unter der Berücksichtigung von (5.14) kann man schreiben

$$\underline{r}_i^T(k) \underline{z}(k-1) = \underline{z}^T(k-1) \underline{r}_i(k) \quad (5.27)$$

und mit (5.20), (5.26) ergibt sich

$$\Delta V(\underline{r}_i, k) = \sum_{i=1}^n \left(-2 \varepsilon(k) e_i^2(k) + \varepsilon^2(k) e_i^2(k) \underline{z}^T(k-1) \underline{z}(k-1) \right) < 0. \quad (5.28)$$

Die Ungleichung

$$\varepsilon(k) e_i^2(k) \left(-2 + \varepsilon(k) \underline{z}^T(k-1) \underline{z}(k-1) \right) < 0 \quad (5.29)$$

ist erfüllt, wenn

$$\varepsilon(k) = \frac{\alpha}{\underline{z}^T(k-1) \underline{z}(k-1)}, \quad (5.30)$$

mit

$$0 < \alpha < 2 \quad (5.31)$$

gewählt wird.

Mit (5.30), (5.31) ist $\Delta V(\underline{r}_i, k)$ negativ semidefinit, d.h.

$$\Delta V(\underline{r}_i, k) \leq 0 \quad \text{für alle } k, \quad (5.32)$$

da

$$e_i(k) \equiv 0 \quad \text{für } \underline{r}_i(k) \neq \underline{0} \quad (5.33)$$

auftreten kann und somit nach Definition 5.1 Ljapunov-Stabilität vorliegt. Für den Nachweis der asymptotischen Stabilität müssen zusätzlich folgende Fälle untersucht werden, bei denen $e_i(k)$ bzw. $\underline{e}(k) \equiv \underline{0}$ wird.

Ist $\underline{e}(k) \equiv \underline{0} \quad \forall k$, so folgt aus (5.10)

$$\underline{\Phi}(k+1)\underline{x}(k) + \underline{\Psi}(k+1)\underline{u}(k) + \sum_{i=1}^p u_i(k)\underline{\Gamma}_i(k+1)\underline{x}(k) \equiv \underline{0}, \quad (5.34)$$

wobei die Parameterfehler-Matrizen durch die Annahme konstant sind.

Die Gleichung (5.34) wird erfüllt, wenn

1. $\underline{x}(k), \underline{u}(k), u_i(k)\underline{x}(k)$ linear abhängig und $\underline{\Phi}, \underline{\Psi}, \underline{\Gamma}_i \neq \underline{0}$ sind,
2. $\underline{x}(k)$ und $\underline{u}(k)$ identisch Null, oder
3. $\underline{x}(k), \underline{u}(k), u_i(k)\underline{x}(k)$ linear unabhängig und $\underline{\Phi}, \underline{\Psi}$ und $\underline{\Gamma}_i \equiv \underline{0}$ sind.

Nur wenn der dritte Punkt erfüllt wird, ist die Konvergenz der Parameter sichergestellt, und es liegt asymptotische Stabilität vor.

Nach Kudva und Narendra [25] wird diese Bedingung eingehalten, wenn

das System selbst vollständig steuerbar ist und die Eingangssignale es genügend anregen.

Somit lautet mit (5.21), (5.30) und (5.31) der Identifikationsalgorithmus

$$\underline{R}(k+1) = \underline{R}(k) - \frac{\alpha \underline{e}(k) \underline{z}^T(k-1)}{\underline{z}^T(k-1) \underline{z}(k-1)} \quad (5.35)$$

bzw.

$$\begin{aligned} & \left[\underline{A}(k+1) \mid \underline{B}(k+1) \mid \underline{N}_1(k+1), \dots, \underline{N}_p(k+1) \right] = \\ & = \left[\underline{A}(k) \mid \underline{B}(k) \mid \underline{N}_1(k), \dots, \underline{N}_p(k) \right] - \frac{\alpha \underline{e}(k) \underline{z}^T(k-1)}{\underline{z}^T(k-1) \underline{z}(k-1)}, \end{aligned} \quad (5.36)$$

mit

$$0 < \alpha < 2$$

und

$$\underline{u}(0) \neq \underline{0}.$$

5.1.3 Identifikationsverfahren mit verbesserter

Konvergenz

In den letzten Jahren wurden verschiedene adaptive Identifikations-Entwürfe für diskrete lineare Systeme vorgestellt. Einer dieser Entwürfe ist von Kudva und Narendra [25], der in abgewandelter Form für bilineare Systeme vorgestellt wurde. Er hat den Vorteil, daß beim Entwurf des Adaptionsalgorithmus, die Stabilität des Gesamtsystems mit berücksichtigt wird.

Simulationen haben allerdings gezeigt, daß die Konvergenzgeschwindigkeit sehr langsam ist.

In diesem Abschnitt soll in Anlehnung an C.G. Kim [27], eine Methode vorgestellt werden, die die Konvergenzgeschwindigkeit für bilineare zeitdiskrete Systeme erheblich verbessert.

Der ermittelte Identifikationsalgorithmus nach (5.35)

$$\underline{R}(k+1) = \underline{R}(k) - \frac{\alpha \underline{e}(k) \underline{z}^T(k-1)}{\underline{z}^T(k-1) \underline{z}(k-1)} , \quad (5.37)$$

mit

$$0 < \alpha < 2 ,$$

läßt sich mit (5.11)

$$\underline{e}(k) = \underline{R}(k) \underline{z}(k-1) \quad (5.38)$$

und einer Normierung von $\underline{z}(k-1)$

$$\underline{y}(k) = \underline{z}(k-1) / \|\underline{z}(k-1)\| , \quad (5.39)$$

wobei $\|\cdot\|$ die Euklidische Norm ist, durch

$$\underline{R}(k+1) = \underline{R}(k) - \alpha \underline{R}(k) \underline{v}(k) \underline{v}^T(k) \quad (5.40)$$

darstellen.

Wird $\underline{R}(k)$ durch Zeilenvektoren beschrieben, ergibt dies

$$\underline{r}_i^T(k+1) = \underline{r}_i^T(k) - \alpha \underline{r}_i^T(k) \underline{v}(k) \underline{v}^T(k), \quad i \in [1, n], \quad (5.41)$$

wobei $\underline{r}_i^T(k)$ der i -te Zeilenvektor der Matrix $\underline{R}(k)$ ist.

Mit einem gegebenen Meßvektor $\underline{v}^T(k)$ ist die Norm $\|\underline{r}_i^T(k+1)\|$ bei $\alpha = 1$ am geringsten, und somit ist $\underline{r}_i^T(k) \underline{v}(k)$ bei jedem Abtastschritt der beste Verstärkungsfaktor.

Die geometrische Interpretation von (5.41) zeigt Bild 5.1.

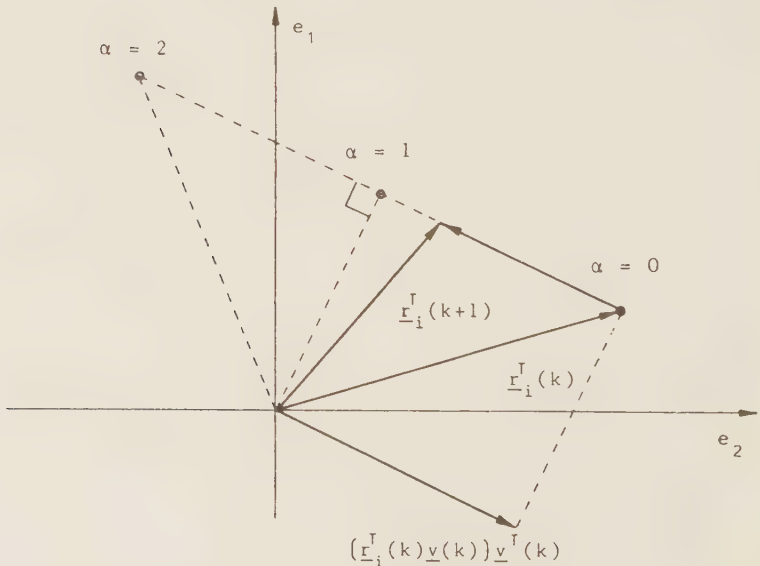


Bild 5.1: Geometrische Interpretation von (5.41)

Aus dem Bild 5.1 kann man gleichzeitig folgende Eigenschaften für $\underline{r}_i^T(k)$ ableiten:

- a) $\underline{r}_i^T(k+1) \perp \underline{v}^T(k)$ für $\alpha = 1$,
- b) $\underline{r}_i^T(k+1)$ liegt in der Ebene, die durch $\underline{r}_i^T(k)$ und $\underline{v}^T(k)$ aufgespannt wird,
- c) wenn $\underline{r}_i^T(k) \uparrow \underline{v}^T(k)$, dann ist $\underline{r}_i^T(k+1) = \underline{0}$ und
- d) $\| \underline{r}_i^T(k+1) \| < \| \underline{r}_i^T(k) \|$.

Obwohl mit (5.41) die Konvergenz sichergestellt ist, verzögert sich die Konvergenzgeschwindigkeit von $\underline{r}_i^T(k)$ durch die willkürliche Richtung von $\underline{v}^T(k)$, bzw. $\underline{z}^T(k-1)$.

Um dieses Problem zu umgehen, führt man anstelle von $\{ \underline{v}^T(k_0), \underline{v}^T(k_0+1), \dots, \underline{v}^T(k) \}$ eine orthonormale Folge $\underline{\hat{v}}_{|k_0, k|}^T := \{ \underline{\hat{v}}^T(k_0), \underline{\hat{v}}^T(k_0+1), \dots, \underline{\hat{v}}^T(k) \}$ ein, die aus paarweise orthonormalen Vektoren besteht. Die bisherige Optimierung wurde mit $\alpha = 1$ erreicht, damit $\underline{r}_i^T(k+1) \perp \underline{v}^T(k)$ und somit $\| \underline{r}_i^T(k) \| - \| \underline{r}_i^T(k+1) \|$ maximiert wird. In ähnlicher Weise geschieht dies bei der Benutzung von $\underline{\hat{v}}_{|k_0, k|}^T$ als Orthonormalsystem.

Unter diesem Gesichtspunkt wird der Meßvektor $\underline{z}^T(k-1)$ des Adaptionsgesetzes (5.20)

$$\underline{r}_i^T(k+1) = \underline{r}_i^T(k) - \epsilon(k) e_i(k) \underline{z}^T(k-1), \quad i \in \{1, n\} \quad (5.42)$$

durch einen orthonormierten Vektor $\underline{\hat{v}}^T(k)$ ersetzt, und man erhält

$$\underline{r}_i^T(k+1) = \underline{r}_i^T(k) - \gamma(k) e_i(k) \underline{\hat{v}}^T(k), \quad i \in \{1, n\} \quad (5.43)$$

bzw. mit (5.14)

$$\underline{r}_i^T(k+1) = \underline{r}_i^T(k) - \gamma(k) \underline{r}_i^T(k) \underline{z}(k-1) \hat{\underline{v}}^T(k) \quad , \quad (5.44)$$

$$i \in \{1, n\} \quad .$$

Entsprechend (5.41), wird $\gamma(k)$ so gewählt, daß

$$\underline{r}_i^T(k+1) \perp \hat{\underline{v}}^T(k) \quad . \quad (5.45)$$

Wird die linear unabhängige Meßvektorfolge $\underline{z}|_{k_0, k-1}$ zu einer orthonormierten Folge $\hat{\underline{v}}|_{k_0+1, k}$ umgewandelt (siehe Anhang 9.1) und wird (5.45) eingehalten, dann stehen die Flächen, die von $\hat{\underline{v}}^T(k+1)$, $\underline{r}_i^T(k+1)$ und von $\hat{\underline{v}}^T(k+1)$, $\underline{z}^T(k)$ aufgespannt werden, gemäß Bild 5.2, Bild 5.3 orthogonal aufeinander.

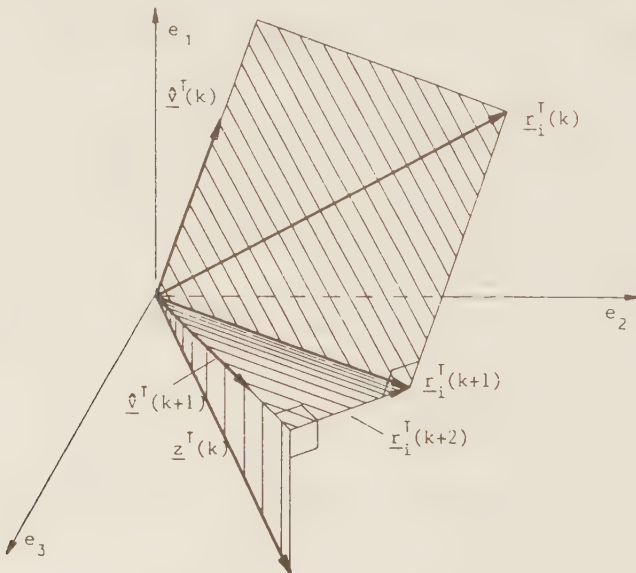


Bild 5.2: Geometrische Interpretation von (5.44)

ergibt sich für (5.48) die äquivalente Beschreibung

$$\underline{r}_i^T(k) \underline{z}(k-1) = [\underline{r}_i^T(k) \underline{\hat{v}}(k)] [\underline{\hat{v}}^T(k) \underline{z}(k-1)] , \quad (5.50)$$

$$i \in \{1, n\} .$$

Mit (5.44) erhält man somit für das Adaptionsgesetz

$$\underline{r}_i^T(k+1) = \underline{r}_i^T(k) - \gamma(k) [\underline{r}_i^T(k) \underline{\hat{v}}(k)] [\underline{\hat{v}}^T(k) \underline{z}(k-1)] \underline{\hat{v}}^T(k) ,$$

$$i \in \{1, n\} . \quad (5.51)$$

Der erforderliche Nachweis der asymptotischen Stabilität wird wieder mit der Ljapunov-Methode geführt. Mit dem Ansatz einer Ljapunovfunktion nach (5.22)

$$V(\underline{r}_i, k) = \sum_{i=1}^n \underline{r}_i^T(k) \underline{r}_i(k) \quad (5.52)$$

erhält man für die erste Differenz

$$\Delta V(\underline{r}_i, k) = \sum_{i=1}^n (\underline{r}_i^T(k+1) \underline{r}_i(k+1) - \underline{r}_i^T(k) \underline{r}_i(k)) , \quad (5.53)$$

und mit (5.51) folgt

$$\Delta V(\underline{r}_i, k) = \sum_{i=1}^n \{ \gamma(k) [\underline{r}_i^T(k) \underline{\hat{v}}(k)]^2 [\underline{\hat{v}}^T(k) \underline{z}(k-1)] \cdot$$

$$\{ -2 + \gamma(k) (\underline{\hat{v}}^T(k) \underline{z}(k-1)) \} \} . \quad (5.54)$$

Damit

$$\Delta V(\underline{r}_i, k) < 0 \quad (5.55)$$

wird, muß

$$\gamma(k) = \frac{\alpha}{\underline{\hat{v}}^T(k) \underline{z}(k-1)} , \quad 0 < \alpha < 2 \quad (5.56)$$

sein. Mit

$$\alpha = 1 \quad (5.57)$$

wird analog zu (5.41) die Annahme (5.45) erfüllt, und somit lautet der Adaptionsalgorithmus nach (5.44)

$$\underline{r}_i^T(k+1) = \underline{r}_i^T(k) - \frac{\underline{r}_i^T(k) \underline{z}(k-1) \underline{\hat{v}}^T(k)}{\underline{\hat{v}}^T(k) \underline{z}(k-1)}, \quad i \in \{1, n\}. \quad (5.58)$$

Die asymptotische Stabilität von (5.58) ist gesichert, da die Bedingung an die Eingangsgröße entsprechend Abschnitt 5.1, gleichzeitig bedeutet, daß die $(n+p+p \cdot n)$ fortlaufenden Vektoren $\underline{z}(k)$ den $(n+p+p \cdot n)$ dimensionalen Euklidischen Raum aufspannen, d.h.

$$\left[\underline{z}(k), \underline{z}(k-1), \dots, \underline{z}(k+n+p+p \cdot n-1) \right] \quad (5.59)$$

ist nichtsingulär.

Der Aufbau des Algorithmus ist somit grundsätzlich mit dem nach (5.41) vergleichbar. Der entscheidende Unterschied besteht aus der Folge $\underline{r}_i^T(k) - \underline{r}_i^T(k+1)$, die immer senkrecht auf der Vorhergehenden steht. Dadurch konvergiert $\underline{r}_i^T(k+1)$ mit maximal $(n+p+p \cdot n)$ Schritten gegen den Ursprung.

Setzt man (5.14) in (5.58) ein, so läßt sich der Adaptionsalgorithmus für alle $i \in \{1, n\}$ durch

$$\begin{aligned} & \left[\underline{A}(k+1) \mid \underline{B}(k+1) \mid \underline{N}_1(k+1), \dots, \underline{N}_p(k+1) \right] = \\ & = \left[\underline{A}(k) \mid \underline{B}(k) \mid \underline{N}_1(k), \dots, \underline{N}_p(k) \right] - \frac{\underline{e}(k) \underline{\hat{v}}^T(k)}{\underline{\hat{v}}^T(k) \underline{z}(k-1)} \end{aligned}$$

ausdrücken.

$$(5.60)$$

5.2 Simulationsergebnisse

Es werden mit einem bilinearen System 2. Ordnung Simulationen auf dem Digitalrechner durchgeführt, um das Verhalten der vorher beschriebenen adaptiven Identifikationsverfahren zu untersuchen.

Die Struktur des Systems ist vergleichbar mit dem in Beispiel 2.2 beschriebenen fremderregten Gleichstrommotor und hat die Form

$$\underline{x}(k+1) = \underline{A}^* \underline{x}(k) + \underline{b}^* u(k) + u(k) \underline{N}^* \underline{x}(k) , \quad (5.61)$$

mit

$$\underline{A}^* = \begin{bmatrix} 0.2 & 1 \\ -0.35 & 0 \end{bmatrix} , \quad \underline{N}^* = \begin{bmatrix} -0.4 & 0.1 \\ 0.25 & -0.1 \end{bmatrix} \quad (5.62)$$

und

$$\underline{b}^* = \begin{bmatrix} -0.1 \\ 0.2 \end{bmatrix} . \quad (5.63)$$

Alle Parameter werden als unbekannt vorausgesetzt. Die Anfangswerte der Modellzustände, sowie der Modellparameter werden zu Null gesetzt:

$$\hat{\underline{x}}(k_0) = \underline{0} , \quad (5.64)$$

$$\underline{A}(k_0), \underline{N}(k_0) = \underline{0} \quad (5.65)$$

und

$$\underline{b}(k_0) = \underline{0} . \quad (5.66)$$

Aufgrund der vorhergehenden Überlegungen, muß die Eingangsgröße $u(k)$ das System genügend anregen. In Anlehnung,

an die von G.Kreisselmeier [23] durchgeführten Simulationen, wird eine Sinusfunktion

$$u(k) = 0.5 (\sin 0.2k + \sin 0.5k) \quad (5.67)$$

als Eingangssignal verwendet.

Der Adaptionsalgorithmus (5.36) für das zu identifizierende System lautet

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{c} \underline{A}(k+1) \\ \underline{b}(k+1) \\ \underline{N}(k+1) \end{array} \right] = \\ & = \left[\begin{array}{c} \underline{A}(k) \\ \underline{b}(k) \\ \underline{N}(k) \end{array} \right] - \frac{\alpha \underline{e}(k) \underline{z}^T(k-1)}{\underline{z}^T(k-1) \underline{z}(k-1)} \end{aligned} \quad (5.68)$$

Es wurde der Verstärkungsfaktor

$$\alpha = 1 \quad (5.69)$$

gewählt.

Die Simulationsergebnisse für die Parameterschätzung nach Bild 5.4 und 5.5 lassen erkennen, daß die $\underline{N}$ - Parameter aus dem bilinearen Term des Systems $u(k)\underline{N} \underline{x}(k)$ erheblich mehr Abtastschritte, als die $\underline{A}$ und $\underline{b}$ - Parameter, erfordern. Für die $\underline{N}$ - Parameter wurden fast 7000 Abtastschritte benötigt und machen somit den sinnvollen Einsatz adaptiver Regler fast unmöglich.

Es sei allerdings darauf hingewiesen, daß die erzielten Simulationsergebnisse nicht unbedingt als optimal bezeichnet werden können, da bei diesem Verfahren, der zu wählende Verstärkungsfaktor mit $\alpha = 1$ festgelegt wurde. Der einzige Grund ergibt sich aus dem nachfolgenden Vergleich mit dem adaptiven Identifikationsverfahren mit verbesserter Konvergenz.

Dazu wurde der Identifikationsalgorithmus mit verbessertem Konvergenzverhalten entsprechend (5.60)

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{c|c|c} \underline{A}(k+1) & \underline{b}(k+1) & \underline{N}(k+1) \end{array} \right] &= \\ &= \left[\begin{array}{c|c|c} \underline{A}(k) & \underline{b}(k) & \underline{N}(k) \end{array} \right] - \frac{\underline{e}(k) \underline{\hat{\varphi}}^T(k)}{\underline{\hat{\varphi}}^T(k) \underline{z}(k-1)} \end{aligned} \quad (5.70)$$

verwendet.

Die Randbedingungen an die Anfangswerte des Modells und die Eingangsgröße $u(k)$ wurden beibehalten. Ebenfalls wurde der Verstärkungsfaktor $\alpha = 1$ angenommen. Der einzige Unterschied zu dem vorhergehenden Identifikationsverfahren besteht aus der orthonormierten Folge des Meßvektors $\underline{z}(k-1)$, die nach dem Gram-Schmidt Verfahren (siehe Anhang 9.1) entwickelt wurde.

Das System 2. Ordnung erfordert für die Identifikation einen fünf-dimensionalen Meßvektor

$$\underline{z}^T(k) = \left[x_1(k), x_2(k), u(k), u(k)x_1(k), u(k)x_2(k) \right]. \quad (5.71)$$

Nach Abschnitt 5.1.3 bedeutet dies, daß mit fünf Abtastschritten die Parameter identifiziert sind, und die Zustandsfehler gleichzeitig gegen Null gehen.

Die Ergebnisse der Simulation werden in Bild 5.6 und Bild 5.7 dargestellt.

Der verhältnismäßig geringe Mehraufwand für das Orthonormierungsverfahren, läßt eine deutliche Verbesserung gegenüber dem vorhergehenden Adaptionalgorithmus unschwer erkennen.

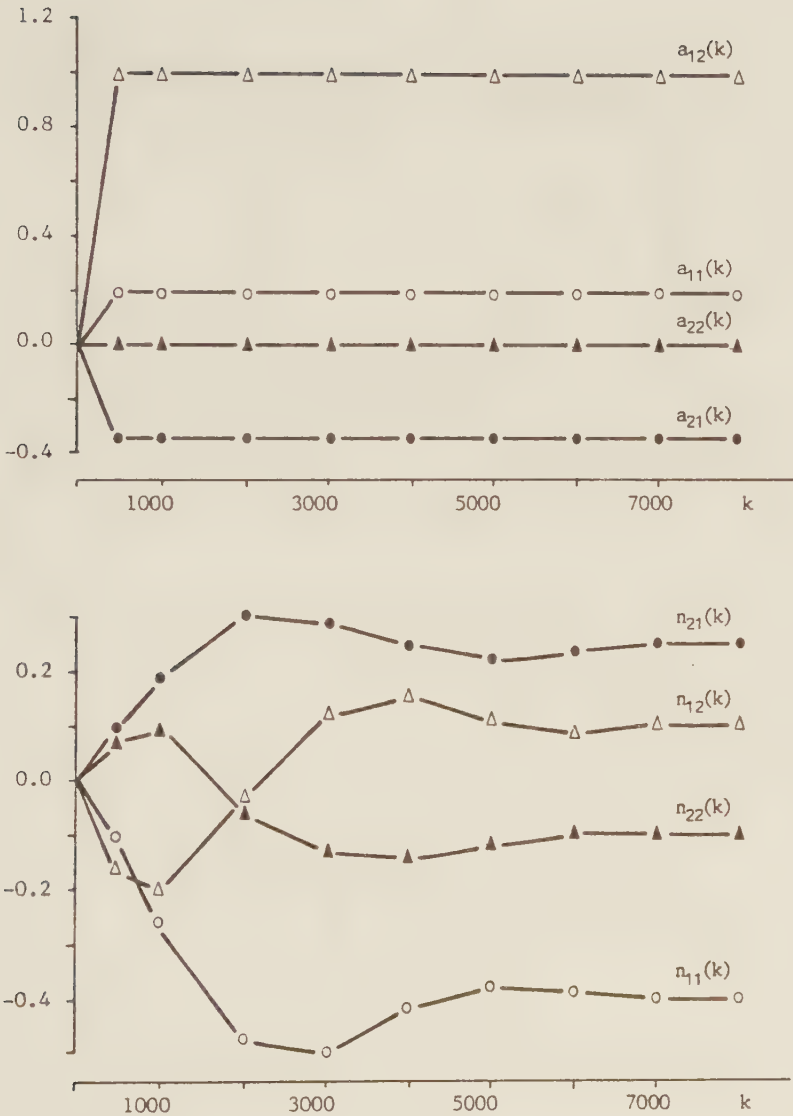


Bild 5.4: Schätzwerte der Systemparameter $a_{ij}(k)$ und $n_{ij}(k)$, $i, j \in \{1, 2\}$ mit dem langsamen Identifikationsverfahren nach (5.68)

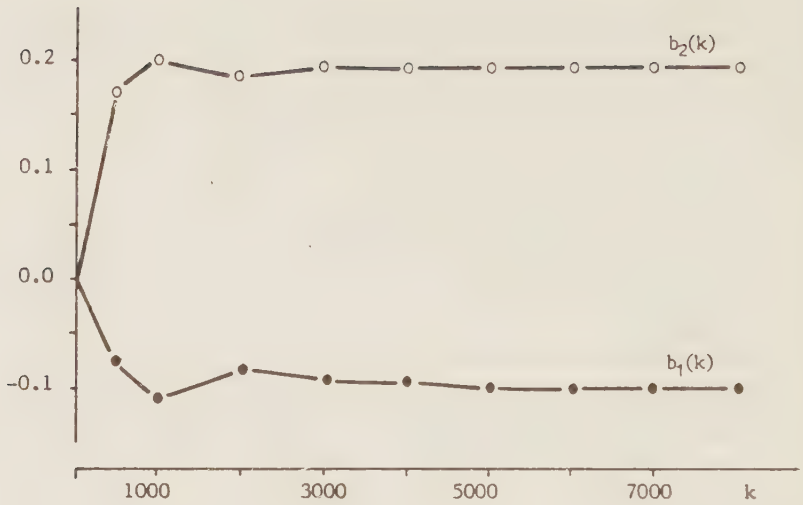


Bild 5.5: Schätzwerte der Systemparameter $b_1(k)$ und $b_2(k)$ mit dem langsamen Identifikationsverfahren nach (5.68)

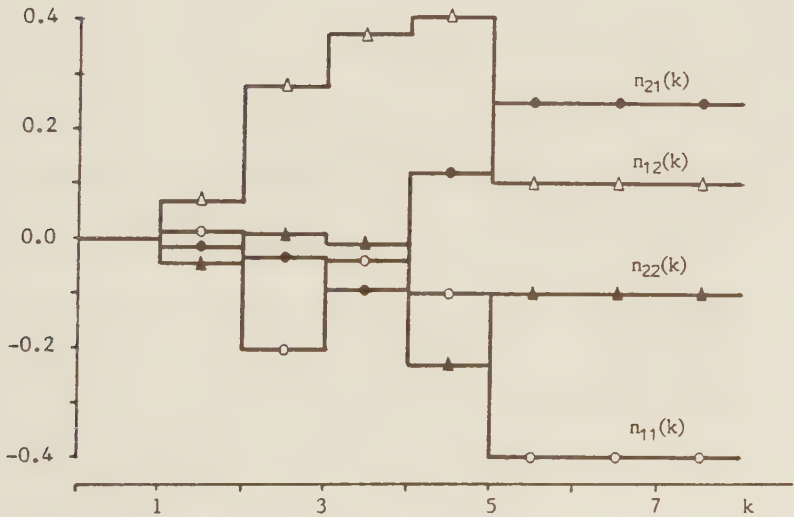
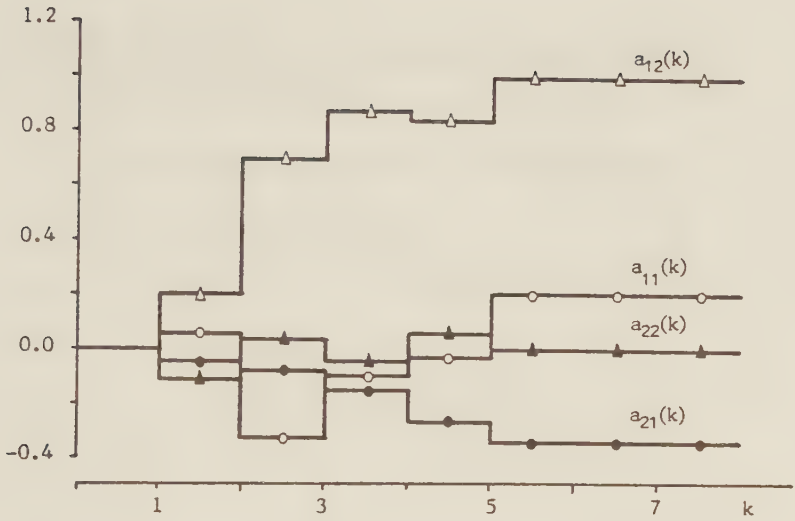


Bild 5.6: Schätzwerte der Systemparameter $a_{ij}(k)$ und $n_{ij}(k)$, $i, j \in \{1, 2\}$ mit dem verbesserten Identifikationsverfahren nach (5.70)

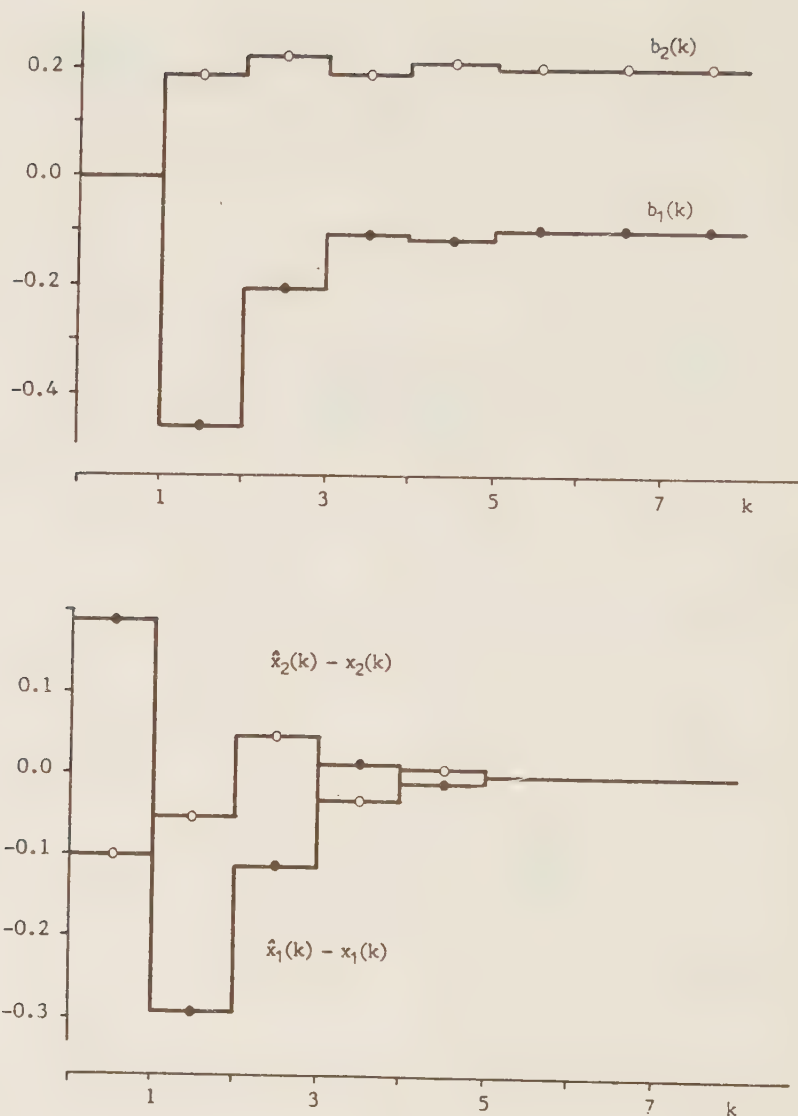


Bild 5.7: Schätzwerte der Systemparameter $b_1(k)$ und $b_2(k)$, sowie der Zustandsfehler $\hat{\underline{x}}(k) - \underline{x}(k)$ mit dem verbesserten Identifikationsverfahren nach (5.70)

6. Identifikation zeitdiskreter bilinearer Einfachsysteme : Sonderfälle

6.1 Lineares System mit multiplikativer Rückführung

In dem vorhergehenden Abschnitt wurde ein Identifikationsverfahren vorgestellt, bei dem alle Zustände des Systems meßbar waren. Diese Voraussetzung wird sehr häufig nicht erfüllt.

Im folgenden wird ein Identifikationsalgorithmus für diskrete bilineare Einfachsysteme entwickelt, der ebenfalls auf dem Stabilitätskriterium nach Ljapunov beruht.

Gegeben sei das zeitdiskrete bilineare Einfachsystem nach Abschnitt 3.2.2, welches durch die Differenzengleichung (3.91)

$$y(k+1) = \sum_{i=1}^n \{ a_i^* y(k-n+i) + n_i^* y(k-n+i)u(k) + g_i^* u(k-n+i) + f_i^* u(k-n+i)u(k) \} \quad (6.1)$$

beschrieben wird, wobei die Systemparameter a_i^* , n_i^* , g_i^* und f_i^* unbekannt sind. Das Eingangs- Ausgangssignal des Systems steht zur Verfügung.

Das Identifikationsproblem soll wieder auf ein Minimierungsproblem zurückgeführt werden, d.h. ein Gütekriterium J als Funktion des Ausgangsfehlers $\eta(k)$ soll minimiert werden, damit gleichzeitig der Parameterfehler zwischen Modell und System zu Null wird.

Der Ausgangsfehler ist

$$\eta(k) = \hat{y}(k) - y(k) \quad , \quad (6.2)$$

wobei der Modellausgang durch

$$\begin{aligned}\hat{y}(k+1) = \sum_{i=1}^n & \{ a_i(k+1)y(k-n+i) + n_i(k+1)y(k-n+i)u(k) \\ & + g_i(k+1)u(k-n+i) + f_i(k+1)u(k-n+i)u(k) \}\end{aligned}\quad (6.3)$$

beschrieben wird, und $a_i(k), n_i(k), g_i(k), f_i(k)$ sind die geschätzten Parameter zum Zeitpunkt k .

Mit (6.1) und (6.3) lautet das Ausgangsfehlermodell

$$\begin{aligned}\eta(k+1) = \sum_{i=1}^n & \{ (a_i(k+1)-a_i^*)y(k-n+i) + (n_i(k+1)-n_i^*)y(k-n+i)u(k) + \\ & + (g_i(k+1)-g_i^*)u(k-n+i) + (f_i(k+1)-f_i^*)u(k-n+i)u(k) \}\end{aligned}$$

$$\eta(k+1) := \underline{\phi}^T(k+1) \underline{w}(k), \quad (6.4)$$

mit dem Parameterfehler-Vektor

$$\underline{\phi}^T(k) = \left[\phi_1(k), \dots, \phi_{4n}(k) \right] \quad (6.5)$$

$$\phi_i(k) = a_i(k) - a_i^* \quad (6.6)$$

$$\phi_{n+i}(k) = n_i(k) - n_i^* \quad (6.7)$$

$$\phi_{2n+i}(k) = g_i(k) - g_i^* \quad (6.8)$$

$$\phi_{3n+i}(k) = f_i(k) - f_i^* \quad (6.9)$$

und

$$\underline{w}(k) = \left[w_1(k), \dots, w_{4n}(k) \right]^T \quad (6.10)$$

$$w_i(k) = y(k-n+i) \quad (6.11)$$

$$w_{n+i}(k) = y(k-n+i)u(k) \quad (6.12)$$

$$w_{2n+i}(k) = u(k-n+i) \quad (6.13)$$

$$w_{3n+i}(k) = u(k-n+i)u(k) \quad (6.14)$$

Der Entwurf des Adaptionalgorithmus nach Abschnitt 5.1 soll weiterhin verwendet werden. Deshalb wird entsprechend dem Ansatz (5.15), das Gütekriterium

$$J(\underline{\eta}(\underline{\phi}(k))) = \frac{1}{2} \eta^2(k) \quad (6.15)$$

gebildet.

In Anlehnung an (5.17)-(5.20) erhält man mit dem Gradientenverfahren das Adaptionsgesetz

$$\underline{\phi}(k+1) = \underline{\phi}(k) - \varepsilon(k) \eta(k) \underline{w}(k-1), \quad (6.16)$$

wobei analog zu (5.30)

$$\varepsilon(k) = \frac{\alpha}{\underline{w}^T(k-1) \underline{w}(k-1)} \quad (6.17)$$

gewählt wird.

Die Rechtfertigung dieses Ansatzes ergibt sich aus dem nachfolgenden Stabilitätsnachweis. Es wird nach Abschnitt 5.1.2 von der Ljapunovfunktion

$$V(\underline{\phi}, k) = \underline{\phi}^T(k) \underline{\phi}(k) \quad (6.18)$$

ausgegangen. Es ist offensichtlich, daß

$$V(\underline{\phi}, k) > 0 \quad (6.19)$$

für $\underline{\phi} \neq \underline{0}$ und $V(\underline{\phi}, k) = 0$ für $\underline{\phi} = \underline{0}$ ist.

Somit lautet die erste Differenz der Ljapunovfunktion (6.18) unter der Berücksichtigung von (6.16), (6.17)

$$\begin{aligned}\Delta V(\underline{\phi}, k) &= V(\underline{\phi}, k+1) - V(\underline{\phi}, k) \\ &= \alpha(\alpha - 2) \frac{\eta^2(k)}{\underline{w}^T(k-1) \underline{w}(k-1)} .\end{aligned}\quad (6.20)$$

Die Bedingung einer Ljapunovfunktion ist erfüllt, wenn

$$\Delta V(\underline{\phi}, k) \leq 0 \quad , \quad (6.21)$$

d.h. für $0 < \alpha < 2$.

Es liegt asymptotische Stabilität vor, wenn der Wertebereich von α eingehalten wird und entsprechend dem Abschnitt 5.1.2, das System selbst vollständig steuerbar ist und von dem Eingangssignal genügend angeregt wird.

Der Identifikationsalgorithmus lautet demnach vollständig mit (6.16) und (6.17)

$$\begin{aligned}& \left[\begin{array}{c} \underline{a}^T(k+1) \\ \underline{n}^T(k+1) \\ \underline{g}^T(k+1) \\ \underline{f}^T(k+1) \end{array} \right] = \\ &= \left[\begin{array}{c} \underline{a}^T(k) \\ \underline{n}^T(k) \\ \underline{g}^T(k) \\ \underline{f}^T(k) \end{array} \right] - \frac{\alpha \eta(k) \underline{w}^T(k-1)}{\underline{w}^T(k-1) \underline{w}(k-1)} .\end{aligned}\quad (6.22)$$

Bei Verwendung des Algorithmus mit verbesserter Konvergenz muß der Meßvektor $\underline{w}(k-1)$ nach Abschnitt 5.1.3 lediglich orthonormiert werden, und man erhält

$$\begin{aligned}& \left[\begin{array}{c} \underline{a}^T(k+1) \\ \underline{n}^T(k+1) \\ \underline{g}^T(k+1) \\ \underline{f}^T(k+1) \end{array} \right] = \\ &= \left[\begin{array}{c} \underline{a}^T(k) \\ \underline{n}^T(k) \\ \underline{g}^T(k) \\ \underline{f}^T(k) \end{array} \right] - \frac{\eta(k) \hat{\underline{w}}^T(k)}{\hat{\underline{w}}^T(k) \underline{w}(k-1)} .\end{aligned}\quad (6.23)$$

6.2 Lineares System mit multiplikativer Verknüpfung des Ein- und Ausgangs

Die in Abschnitt 6.1 getroffenen Voraussetzungen werden ebenfalls von dem zeitdiskreten bilinearen Einfachsystem nach (3.73)

$$y(k+1) = \sum_{i=1}^n (a_i^* y(k+1-i) + n_i^* y(k+1-i)u(k+1-i) + b_i^* u(k+1-i)) \quad (6.24)$$

eingehalten.

Der Ansatz für den Entwurf des Adaptionalgorithmus gestaltet sich in gleicher Weise und führt zu dem Adaptionsgesetz

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{c|c|c} \underline{a}(k+1) & \underline{n}(k+1) & \underline{b}(k+1) \end{array} \right] &= \\ &= \left[\begin{array}{c|c|c} \underline{a}(k) & \underline{n}(k) & \underline{b}(k) \end{array} \right] - \frac{\eta(k) \hat{\underline{w}}^T(k)}{\hat{\underline{w}}^T(k) \underline{w}(k-1)}, \end{aligned} \quad (6.25)$$

wobei $\hat{\underline{w}}^T(k)$ der orthonormierte Vektor von $\underline{w}(k-1)$ ist und

$$\underline{w}^T(k) = \left[w_1(k), \dots, w_{3n}(k) \right], \quad (6.26)$$

mit

$$w_i(k) = y(k+1-i), \quad (6.27)$$

$$w_{n+i}(k) = y(k+1-i)u(k+1-i), \quad i \in \{1, n\} \quad (6.28)$$

und

$$w_{2n+i}(k) = u(k+1-i). \quad (6.29)$$

6.3 Simulationsergebnisse

Um prinzipiell das Verhalten der Adaptionsverfahren nach Abschnitt 6.1 und 6.2 zu zeigen, wurde die Simulation auf das letztere Verfahren beschränkt. Die Struktur der beiden Systemtypen ist zwar unterschiedlich, drückt sich aber bei dem Identifikationsverfahren lediglich durch den unterschiedlichen Meßvektor $\underline{w}(k)$ aus.

Ausgehend von dem zeitdiskreten bilinearen Einfachsystem, das entsprechend (6.23) durch

$$\begin{aligned} y(k+1) = & a_1^* y(k) + a_2^* y(k-1) + n_1^* y(k)u(k) + \\ & + n_2^* y(k-1)u(k-1) + b_1^* u(k) + b_2^* u(k-1) , \end{aligned} \quad (6.30)$$

mit

$$\begin{aligned} a_1^* &= -0.4 & , & \quad a_2^* = 0.05 \\ n_1^* &= -0.1 & , & \quad n_2^* = 0.02 \\ b_1^* &= -0.1 & , & \quad b_2^* = 0.2 \end{aligned} \quad (6.31)$$

beschrieben sei, lautet der Adaptionsalgorithmus (6.24) für das zu identifizierende System

$$\begin{aligned} & \left[a_1(k+1), a_2(k+1), n_1(k+1), n_2(k+1), b_1(k+1), b_2(k+1) \right] = \\ & = \left[a_1(k), a_2(k), n_1(k), n_2(k), b_1(k), b_2(k) \right] - \frac{\eta(k) \hat{\underline{w}}^T(k)}{\hat{\underline{w}}^T(k) \underline{w}(k-1)} , \end{aligned} \quad (6.32)$$

wobei $\hat{\underline{w}}^T(k)$ der orthonormierte Vektor von $\underline{w}(k-1)$ ist.

Die Systemparameter werden wieder als unbekannt vorausgesetzt. Die Anfangswerte der Modellparameter sind Null, und das Eingangssignal ist nach der vorhergehenden Simulation

$$u(k) = 0.5 (\sin 0.2k + \sin 0.5k) . \quad (6.33)$$

An dem Meßvektor

$$\underline{w}^T(k) = \left[y(k), y(k-1), y(k)u(k), y(k-1)u(k-1), u(k), u(k-1) \right] \quad (6.34)$$

läßt sich erkennen, daß entsprechend Abschnitt 5.1.3 die Systemparameter mit 6 Abtastschritten identifiziert sind. Bild 6.1 und Bild 6.2 stellen dies anschaulich dar. Gleichzeitig geht der Ausgangsfehler $\hat{y}(k) - y(k)$ gegen Null.

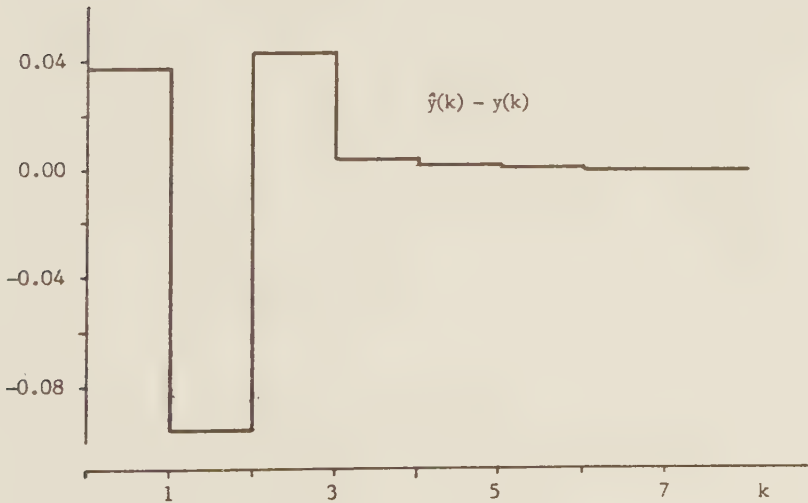


Bild 6.1: Ausgangsfehler zwischen System- und Modellausgang

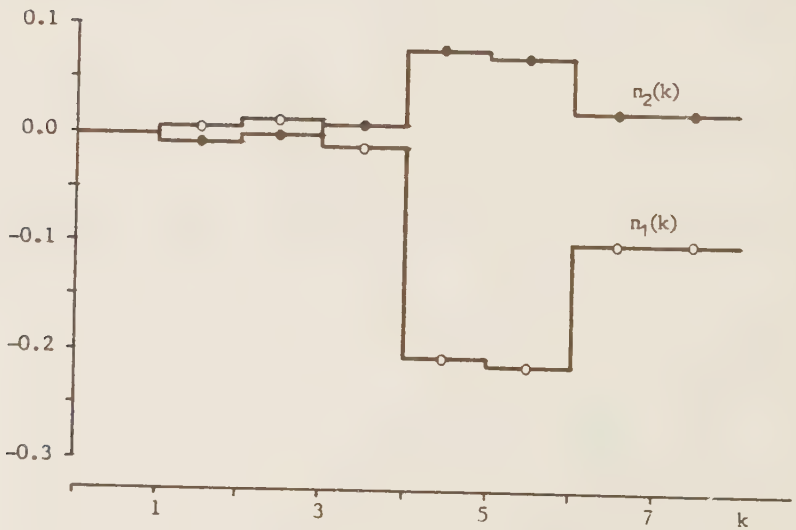
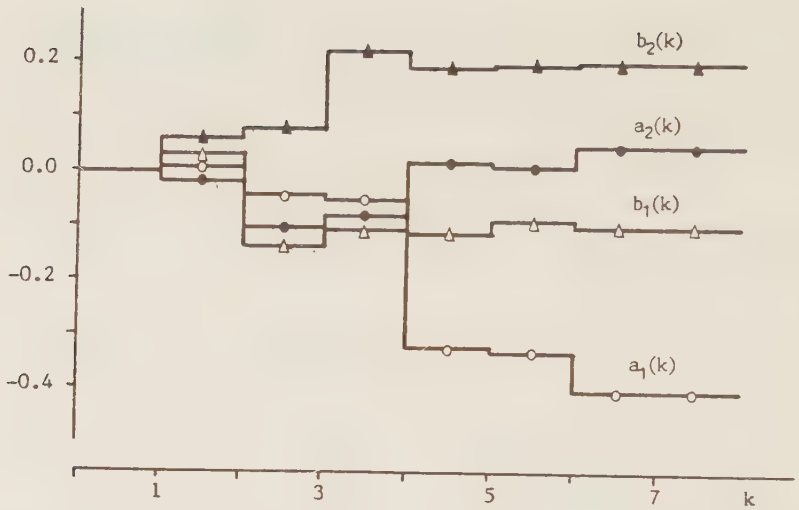


Bild 6.2: Parameterschätzwerte des zeitdiskreten bilinearen Einfachsystems (6.30)

7. Adaptiver Beobachter zeitdiskreter bilinearer Systeme

In diesem Abschnitt wird der Entwurf eines diskreten adaptiven Beobachters für ein bilineares Einfachsystem vorgestellt, wobei im wesentlichen auf ein Verfahren nach G. Kreisselmeier [23] zurückgegriffen wird. Der Beobachter wird durch eine parametrisierte Form dargestellt, und das Adaptionsgesetz für die Parameterschätzung basiert auf dem Gradientenverfahren.

Der zu zeigende Entwurf garantiert schnelle Konvergenz der Parameter- und Zustandsschätzung, sowie die asymptotische Stabilität des Gesamtsystems.

Bei den folgenden Überlegungen wird von dem bilinearen System nach Abschnitt 3.2.1 ausgegangen

$$y(k+1) = \sum_{i=1}^n \{ a_i y(k+1-i) + n_i y(k+1-i)u(k+1-i) + b_i u(k+1-i) \} , \quad (7.1)$$

mit der entsprechenden Zustands-Beschreibung

$$\underline{x}(k+1) = \underline{A} \underline{x}(k) + u(k) \underline{N} \underline{x}(k) + \underline{b} u(k) \quad (7.2)$$

$$y(k) = \underline{c}^T \underline{x}(k) , \quad \underline{x}(k_0) = \underline{x}_0 . \quad (7.3)$$

Nach (3.67)-(3.69) ist

$$\underline{A} := \begin{bmatrix} \underline{a} & \begin{smallmatrix} \vdots \\ \underline{I}_{n-1} \\ \vdots \end{smallmatrix} \\ \underline{0}^T & \end{bmatrix} , \quad \underline{a} = [a_1, a_2, \dots, a_n]^T, \quad (7.4)$$

$$\underline{N} := \begin{bmatrix} \underline{n} & \begin{smallmatrix} \vdots \\ \underline{0}_{n,n-1} \\ \vdots \end{smallmatrix} \end{bmatrix} , \quad \underline{n} = [n_1, n_2, \dots, n_n]^T, \quad (7.5)$$

$$\underline{b} := \begin{bmatrix} b_1, b_2, \dots, b_n \end{bmatrix}^T \quad (7.6)$$

und

$$\underline{c}^T := \begin{bmatrix} 1, 0, \dots, 0 \end{bmatrix}. \quad (7.7)$$

Es wird gleichzeitig angenommen, daß der Eingang $u(k)$ und der Ausgang $y(k)$ zugänglich sind.

Das Problem, welches betrachtet werden soll, sei der Entwurf eines adaptiven Beobachters, der gleichzeitig die unbekannten Parameter $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{n}$ und den unzugänglichen Zustandsvektor $\underline{x}(k)$, aus den Eingangs- Ausgangs- Messungen $u(k)$ und $y(k)$, schätzt.

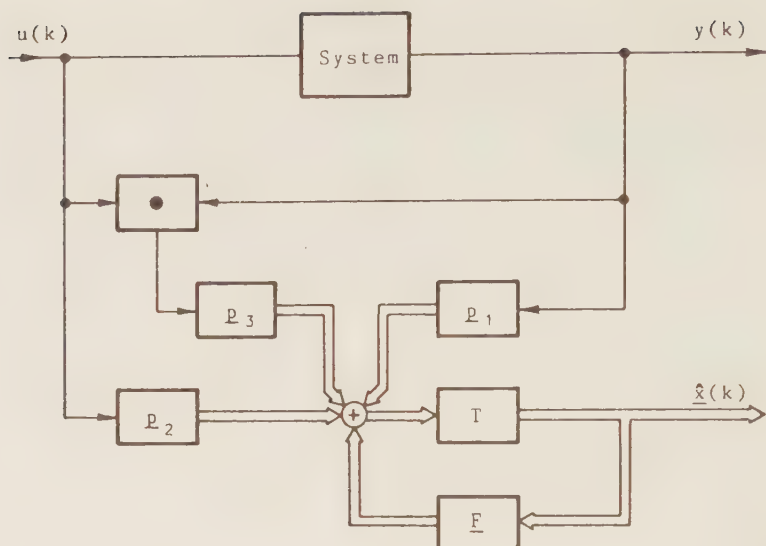


Bild 7.1: Strukturbild eines zeitdiskreten bilinearen Luenberger-Beobachters

Mit der vorausgesetzten Annahme stellt sich nun die Frage, welche Werte müssen der Matrix $\underline{F}$ und den Vektoren $\underline{p}_1$, $\underline{p}_2$, $\underline{p}_3$ zugeordnet werden, damit der Zustandsfehler $\underline{e}(k)$ gegen Null strebt.

Zu diesem Zweck geht man von dem Zustandsfehler $\underline{e}(k+1)$ aus, indem (7.2) von (7.8) subtrahiert wird

$$\begin{aligned} \underline{e}(k+1) = & \underline{F} \underline{\hat{x}}(k) + \underline{p}_1 y(k) + \underline{p}_2 u(k) + \underline{p}_3 y(k)u(k) - \\ & - \underline{A} \underline{x}(k) - \underline{N} \underline{x}(k) u(k) - \underline{b} u(k) . \end{aligned} \quad (7.15)$$

Setzt man (7.3) in (7.15) ein und mit

$$\underline{\hat{x}}(k) = \underline{x}(k) + \underline{e}(k) , \quad (7.16)$$

ergibt sich für den Zustandsfehler

$$\begin{aligned}\underline{e}(k+1) &= \underline{F} \underline{e}(k) - (\underline{A} - \underline{F} - \underline{p}_1 \underline{c}^T) \underline{x}(k) - \\ &- (\underline{N} - \underline{p}_3 \underline{c}^T) \underline{x}(k) u(k) - (\underline{b} - \underline{p}_2) u(k) .\end{aligned}\quad (7.17)$$

Mit

$$\underline{p}_1 = \underline{a} - \underline{f} , \quad (7.18)$$

$$\underline{p}_2 = \underline{b} \quad (7.19)$$

und

$$\underline{p}_3 = \underline{n} \quad (7.20)$$

ergibt sich aus (7.17) eine homogene Differenzengleichung

$$\underline{e}(k+1) = \underline{F} \underline{e}(k) , \quad (7.21)$$

mit der Lösung

$$\underline{e}(k) = \underline{F}^k \underline{e}(k_0) . \quad (7.22)$$

Sofern die Matrix $\underline{F}$ asymptotisch stabile Eigenwerte aufweist, konvergiert der Zustandsfehler $\underline{e}(k)$ für $k \rightarrow \infty$ gegen Null.

7.2 Entwurf eines parametrisierten Beobachters

Die Lösung der Zustandsbeschreibung (7.8) des Beobachters lautet

$$\begin{aligned} \underline{\hat{x}}(k) = \underline{F}^k \underline{\hat{x}}_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \underline{F}^{k-1-i} (\underline{p}_1 d_1(i) + \underline{p}_2 d_2(i) + \\ + \underline{p}_3 d_3(i)) \quad . \end{aligned} \quad (7.23)$$

Um die Struktur eines parametrisierten Beobachters zu erzielen, definiert man eine (n, n) -Matrix $\underline{S}_j(k)$ als Lösung folgender Differenzengleichung:

$$\begin{aligned} \underline{S}_j(k+1) = \underline{F} \underline{S}_j(k) + \underline{I}_n d_j(k) \quad , \quad \underline{S}_j(k_0) = \underline{0} \quad , \quad (7.24) \\ j \in \{1, 2, 3\} \quad , \end{aligned}$$

wobei

$$\underline{S}_j(k) = \sum_{i=0}^{k-1} \underline{F}^{k-1-i} d_j(i) \quad , \quad j \in \{1, 2, 3\} \quad (7.25)$$

die Lösung ist, und $\underline{I}_n$ eine (n, n) -Einheitsmatrix darstellt.

Mit der Umformung von (7.23)

$$\begin{aligned} \underline{\hat{x}}(k) = \underline{F}^k \underline{\hat{x}}_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \underline{F}^{k-1-i} d_1(i) \underline{p}_1 + \\ + \sum_{i=0}^{k-1} \underline{F}^{k-1-i} d_2(i) \underline{p}_2 + \\ + \sum_{i=0}^{k-1} \underline{F}^{k-1-i} d_3(i) \underline{p}_3 \end{aligned} \quad (7.26)$$

und unter der Verwendung von (7.25) entsteht

$$\underline{\hat{x}}(k) = \underline{F}^k \underline{\hat{x}}_0 + \underline{S}_1(k) \underline{p}_1 + \underline{S}_2(k) \underline{p}_2 + \underline{S}_3(k) \underline{p}_3 \quad , \quad (7.27)$$

bzw.

$$\underline{\hat{x}}(k) = \underline{F}^k \underline{\hat{x}}_0 + \underline{S}(k) \underline{p}, \quad (7.28)$$

wobei

$$\underline{S}(k) = \left[\begin{array}{c|c|c} \underline{S}_1(k) & \underline{S}_2(k) & \underline{S}_3(k) \end{array} \right] \quad (7.29)$$

eine $(n, 3n)$ -Matrix und

$$\underline{p} = \left[\begin{array}{c|c|c} \underline{p}_1^T & \underline{p}_2^T & \underline{p}_3^T \end{array} \right]^T \quad (7.30)$$

ein $3n$ -Vektor ist.

In der parametrisierten Version (7.28) der Zustandsgleichung (7.8) erscheint die Zustands-Schätzung als eine lineare Funktion der Beobachterparameter.

Diese Darstellung nennt man parametrisierte Beobachter.

Sie ist identisch mit dem Luenberger-Beobachter, wenn

$$\underline{p} = \underline{p}^* \text{ ist,} \quad (7.31)$$

wobei $\underline{p}^*$ die Systemparameter nach (7.18)-(7.20) beinhaltet.

Wie vorher gezeigt wurde, bedeutet dies, daß bei einer stabilen $\underline{F}$ -Matrix für $k \rightarrow \infty$ der Zustandsfehler

$$\underline{e}(k) = \underline{F}^k \underline{e}(k_0) \rightarrow \underline{0} \quad (7.32)$$

strebt.

Für den Systemzustand gilt mit (7.16) und (7.28)

$$\underline{x}(k) = \underline{\hat{x}}(k) - \underline{e}(k), \quad (7.33)$$

$$\underline{x}(k) = \underline{S}(k) \underline{p}^* + \underline{F}^k \underline{x}_0 - \underline{F}^k \underline{e}(k_0) \quad (7.34)$$

bzw.

$$\underline{x}(k) = \underline{S}(k) \underline{p}^* + \underline{F}^k \underline{x}_0 \quad (7.35)$$

Subtrahiert man (7.35) von (7.28), so ergibt sich für den Zustandsfehler

$$\underline{e}(k) = \underline{S}(k) (\underline{p} - \underline{p}^*) + \underline{F}^k \underline{e}(k_0) \quad (7.36)$$

Der Zustandsfehler wird durch zwei Komponenten beeinflusst. Zum einen, durch den Parameterfehler, der proportional zur Parameterabweichung ist und zum anderen, durch den Beobachtungsfehler, der sich aus den unterschiedlichen Anfangszuständen des Systems und des Beobachters ergibt.

Analog zur Ausgangsgleichung (7.3) des Systems, ergibt sich mit (7.28) für den Beobachteraussgang

$$\hat{y}(k) = \underline{c}^T (\underline{F}^k \underline{x}_0 + \underline{S}(k) \underline{p}) \quad (7.37)$$

Für den Ausgangsfehler

$$\eta(k) = \hat{y}(k) - y(k) \quad (7.38)$$

gilt

$$\eta(k) = \underline{c}^T \underline{S}(k) (\underline{p} - \underline{p}^*) + \underline{c}^T \underline{F}^k \underline{e}(k_0) \quad (7.39)$$

Bild 7.2 zeigt das Strukturdiagramm eines parametrisierten bilinearen Beobachters nach der mathematischen Beschreibung (7.24), (7.28).

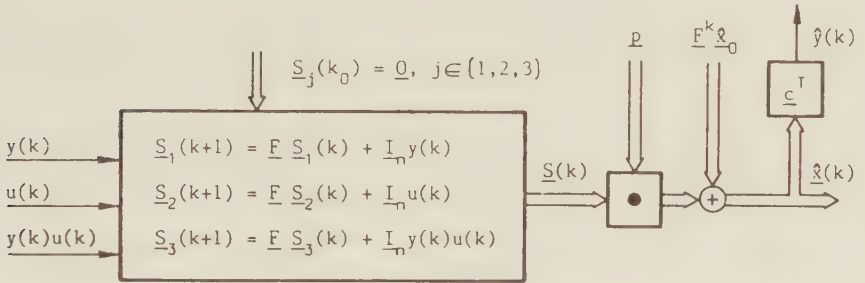


Bild 7.2: Strukturdiagramm eines parametrisierten bilinearen Beobachters

7.3 Vereinfachung des dynamischen Systems $\underline{S}(k)$

Wie gezeigt wurde, ist die Zustandsgleichung (7.8) des Luenberger-Beobachters mit n Differenzengleichungen in ein System (7.24) mit n x 3n Differenzengleichungen zerlegt worden. Die Gleichungen sind unabhängig von den Parametern. Erst bei der Lösung der Zustandsgleichungen des Beobachters (7.28) werden die Parameter wieder benötigt.

Um die Nachbildung des Systems $\underline{S}(k)$ (7.24) zu vereinfachen, wird die $(n, 3n)$ $\underline{S}$ -Matrix in $3n$ - Spaltenvektoren zerlegt und es folgt mit (7.29)

$$\begin{aligned} \underline{S}(k) &= \left[\begin{array}{c|c|c} \underline{S}_1(k) & \underline{S}_2(k) & \underline{S}_3(k) \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix} \underline{s}_{11}(k), \dots, \underline{s}_{1n}(k) \\ \vdots \\ \underline{s}_{31}(k), \dots, \underline{s}_{3n}(k) \end{matrix} & \begin{matrix} \underline{s}_{21}(k), \dots, \underline{s}_{2n}(k) \\ \vdots \\ \underline{s}_{31}(k), \dots, \underline{s}_{3n}(k) \end{matrix} \end{array} \right], \end{aligned} \quad (7.40)$$

wobei

$$\begin{aligned} \underline{s}_{jm}(k+1) &= \underline{F} \underline{s}_{jm}(k) + \underline{i}_m d_j(k), \quad \underline{s}_{jm}(k_0) = \underline{0} \quad (7.41) \\ &\quad j \in \{1, 2, 3\} \\ &\quad m \in \{1, \dots, n\} \end{aligned}$$

und $\underline{i}_m$ der m-te Spaltenvektor der Einheitsmatrix $\underline{I}$ ist.

Liegt die Form (7.9) der Matrix $\underline{F}$ vor, so ist nach [23]

$$(\underline{z}\underline{I} - \underline{F}^T)^{-1} \underline{i}_1 = \frac{1}{\det(\underline{z}\underline{I} - \underline{F})} \left[z^{n-1}, z^{n-2}, \dots, z, 1 \right]^T \quad (7.42)$$

und

$$(z\underline{I} - \underline{F})^{-1} \underline{i}_m = \underline{T}_m (z\underline{I} - \underline{F}^T)^{-1} \underline{i}_1, \quad m \in \{1, \dots, n\}, \quad (7.43)$$

wobei $\underline{T}_m$ konstante Matrizen sind, deren Elemente die entsprechenden Werte der Polynomial-Koeffizienten von $(z\underline{I} - \underline{F})^{-1} \underline{i}_m$ beinhalten.

Die Matrizen lassen sich in einfacher Weise aus (7.42), (7.43) mit

$$(z\underline{I} - \underline{F})^{-1} \underline{i}_m = \underline{T}_m \frac{1}{\det(z\underline{I} - \underline{F})} \begin{bmatrix} z^{n-1}, z^{n-2}, \dots, z, 1 \end{bmatrix}^T, \quad m \in \{1, \dots, n\} \quad (7.44)$$

bestimmen.

Um die Vereinfachung von $\underline{S}(k)$ durchführen zu können, wird (7.41) zunächst z-transformiert:

$$\underline{s}_{jm}(z) = (z\underline{I} - \underline{F})^{-1} \underline{i}_m d_j(z), \quad j \in \{1, 2, 3\}, \quad m \in \{1, \dots, n\}. \quad (7.45)$$

Mit der Definition

$$\underline{s}'_j(z) := (z\underline{I} - \underline{F}^T)^{-1} \underline{i}_1 d_j(z), \quad j \in \{1, 2, 3\}, \quad (7.46)$$

ergibt sich aus (7.43), (7.45)

$$\underline{s}_{jm}(z) = \underline{T}_m \underline{s}'_j(z), \quad j \in \{1, 2, 3\}, \quad m \in \{1, \dots, n\}. \quad (7.47)$$

Anstelle der $\underline{3n}^2$ Differenzengleichungen (7.41), werden mit (7.46) und den Transformationsgleichungen (7.47) nur $\underline{3n}$ Differenzengleichungen zur Realisierung benötigt.

Die z-Inverse von (7.46), (7.47) liefert

$$\underline{s}'_j(k+1) = \underline{F}^T \underline{s}'_j(k) + \underline{i}_1 d_j(k) \quad , \quad j \in \{1, 2, 3\} \quad (7.48)$$

$$\underline{s}_{jm}(k) = \underline{T}_{jm} \underline{s}'_j(k) \quad , \quad m \in \{1, \dots, n\} \quad (7.49)$$

und mit der Definition (7.10)-(7.12) erhält man

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \underline{s}'_1(k+1) \\ \underline{s}'_2(k+1) \\ \underline{s}'_3(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \underline{F}^T & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{F}^T & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{F}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{s}'_1(k) \\ \underline{s}'_2(k) \\ \underline{s}'_3(k) \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} \underline{i}_1 & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{i}_1 & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{i}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(k) \\ u(k) \\ y(k)u(k) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7.50)$$

bzw.

$$\underline{s}'(k+1) = \underline{F}' \underline{s}'(k) + \underline{B}' \begin{bmatrix} y(k) \\ u(k) \\ y(k)u(k) \end{bmatrix} \quad (7.51)$$

Bild 7.3 zeigt das zugehörige Strukturdiagramm.

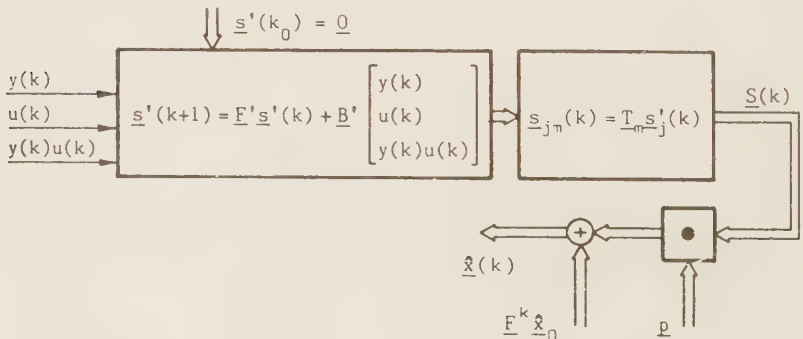


Bild 7.3: Strukturdiagramm des parametrisierten Beobachters mit vereinfachtem System $\underline{s}(k)$ nach Gleichung (7.28), (7.49) und (7.51)

7.4 Ableitung des Adaptionsgesetzes

Die Systemzustände können nach (7.35) in der parametrisierten Beschreibung mit

$$\underline{x}(k) = \underline{S}(k) \underline{p}^* + \underline{F}^k \underline{x}_0 \quad (7.52)$$

bestimmt werden.

Entsprechend (7.28), (7.37) gilt für den adaptiven Beobachter

$$\underline{\hat{x}}(k) = \underline{S}(k) \underline{p}(k) + \underline{F}^k \underline{\hat{x}}_0, \quad (7.53)$$

$$\hat{y}(k) = \underline{c}^T \underline{\hat{x}}(k), \quad (7.54)$$

wobei $\hat{y}(k)$ der Ausgang des Beobachters ist.

$\underline{\hat{x}}(k)$ ist die Schätzung des Systemzustands $\underline{x}(k)$, und $\underline{p}(k)$ ist die Schätzung des Parametervektors $\underline{p}^*$, der entsprechend (7.18)-(7.20) wie folgt definiert wird:

$$\underline{p}(k) = \begin{bmatrix} \underline{a}(k) - \underline{f} \\ \underline{b}(k) \\ \underline{n}(k) \end{bmatrix}. \quad (7.55)$$

$\underline{a}(k)$, $\underline{b}(k)$, $\underline{n}(k)$ sind Parameterschätzungen von $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{n}$ und $\underline{\hat{x}}_0$ ist der Anfangswert von $\underline{\hat{x}}(k)$.

Der adaptive Beobachter soll so ausgelegt werden, daß für $k \rightarrow \infty$

$$\underline{p}(k) \rightarrow \underline{p}^* \quad (7.56)$$

und

$$\underline{\hat{x}}(k) \rightarrow \underline{x}(k) \quad (7.57)$$

konvergiert.

Dieses Ziel wird erreicht, wenn $\underline{p}(k)$ solange nachgestellt wird, bis der Beobachteraussgang $\hat{y}(k)$ gegen den Systemausgang $y(k)$ konvergiert.

Für die Herleitung des Adaptionsgesetzes wird aus diesem Grund, wie bereits in den vorhergehenden Abschnitten gezeigt wurde, der Ausgangsfehler

$$\eta(\underline{p}, \underline{p}^*, k) = \hat{y}(\underline{p}, k) - y(\underline{p}^*, k) \quad (7.58)$$

gebildet, um damit ein geeignetes Gütekriterium

$$J = f(\eta(\underline{p}, \underline{p}^*, k)) \quad (7.59)$$

zu realisieren.

Das Identifikationsproblem läßt sich auf das Minimierungsproblem des Gütekriteriums zurückführen, welches mit Hilfe des Gradientenverfahrens gelöst wird.

Bei der Auswahl des Gütekriteriums wird auf eine quadratische Funktion

$$J = \frac{1}{2} \eta^2(\underline{p}, \underline{p}^*, k) \quad (7.60)$$

zurückgegriffen, die ein eindeutiges Minimum bei $\underline{p} = \underline{p}^*$ hat, d.h. für alle $\underline{p} \in \mathbb{R}^{3n}$ gilt:

$$f(\eta(\underline{p}^*)) < f(\eta(\underline{p})) \quad . \quad (7.61)$$

Entsprechend dem Gradientenverfahren lautet die allgemeine Form des Adaptionsgesetzes

$$\underline{p}(k+1) = \underline{p}(k) - \theta(k) \frac{\partial J(\eta(\underline{p}(k)))}{\partial \underline{p}(k)} \quad , \quad (7.62)$$

wobei $\theta(k)$ der Verstärkungsfaktor ist.

Somit ergibt sich für das Adaptionsgesetz mit quadratischem Gütekriterium (7.60)

$$\underline{p}(k+1) = \underline{p}(k) - \theta(k) \frac{\partial \left(\frac{1}{2} \eta^2(k) \right)}{\partial \underline{p}(k)} , \quad (7.63)$$

und mit dem Ausgangsfehler (7.39) erhält man

$$\underline{p}(k+1) = \underline{p}(k) - \theta(k) \frac{\partial}{\partial \underline{p}(k)} \left[\frac{1}{2} (\underline{c}^T \underline{S}(k) (\underline{p}(k) - \underline{p}^*) + \underline{c}^T \underline{F}^k \underline{e}(k_0))^2 \right] , \quad (7.64)$$

oder anders geschrieben

$$\underline{p}(k+1) = \underline{p}(k) - \theta(k) \underline{m}(k) \eta(k) , \quad (7.65)$$

wobei

$$\underline{m}^T(k) := \underline{c}^T \underline{S}(k) \quad (7.66)$$

ist.

Für die Anwendung des Adaptionsgesetzes muß, im Hinblick auf asymptotische Stabilität und maximale Konvergenzgeschwindigkeit, $\theta(k)$ noch ausgelegt werden. Zu diesem Zweck wird der Parameterfehler

$$\underline{\phi}(k) := \underline{p}(k) - \underline{p}^* \quad (7.67)$$

gebildet.

Subtrahiert man $\underline{p}^*(k+1)$ von (7.65), ergibt dies

$$\underline{\phi}(k+1) = \underline{\phi}(k) - \theta(k) \underline{m}(k) \eta(k) \quad (7.68)$$

und mit (7.39) erhält man

$$\underline{\phi}(k+1) = \underline{\phi}(k) - \theta(k) \underline{m}(k) \{ \underline{m}^T(k) \underline{\phi}(k) + \underline{c}^T \underline{F}^k \underline{e}(k_0) \}, \quad (7.69)$$

bzw.

$$\underline{\phi}(k+1) = (\underline{I} - \theta(k) \underline{m}(k) \underline{m}^T(k)) \underline{\phi}(k) + \theta(k) \underline{m}(k) \underline{c}^T \underline{F}^k \underline{e}(k_0). \quad (7.70)$$

Wenn $\{ \theta(k) \underline{m}(k) \} < \underline{w}$, mit $\underline{w} = \text{konst}_k$ und die Matrix $\underline{F}$ stabil ist, d.h. die Eigenwerte $|\lambda_i(\underline{F})| < 1$, für $i \in (1, \dots, n)$, dann konvergiert der inhomogene Teil von (7.70) für $k \rightarrow \infty$ gegen Null.

Das Stabilitätsverhalten ist somit ausschließlich vom verbleibenden homogenen Teil der Gleichung (7.70)

$$\underline{\phi}(k+1) = (\underline{I} - \theta(k) \underline{m}(k) \underline{m}^T(k)) \underline{\phi}(k) \quad (7.71)$$

abhängig.

Soll der Parameterfehler gegen Null konvergieren, so muß die Matrix $(\underline{I} - \theta(k) \underline{m}(k) \underline{m}^T(k))$ asymptotisch stabile Eigenwerte aufweisen. Der Nachweis geschieht, wie bei den vorangegangenen Abschnitten, nach der direkten Methode von Ljapunov.

Die gewählte Ljapunovfunktion habe die Form

$$V(\underline{\phi}, k) = \underline{\phi}^T(k) \underline{\phi}(k) \quad (7.72)$$

und es wird angenommen, daß analog zu (5.30)

$$\theta(k) = \frac{\alpha}{\underline{m}^T(k) \underline{m}(k)} \quad (7.73)$$

sei.

Es ist offensichtlich, daß die Ljapunovfunktion

$$V(\underline{\phi}, k) > 0 \quad \text{für } \underline{\phi}(k) \neq \underline{0} \quad (7.74)$$

ist.

Für die erste Differenz der Ljapunovfunktion (7.72) gilt

$$\begin{aligned} \Delta V(\underline{\phi}, k) &= V(\underline{\phi}, k+1) - V(\underline{\phi}, k) \\ &= \underline{\phi}^T(k+1) \underline{\phi}(k+1) - \underline{\phi}^T(k) \underline{\phi}(k) \quad . \end{aligned} \quad (7.75)$$

Das Einsetzen von (7.71) in (7.75) ergibt

$$\begin{aligned} \Delta V(\underline{\phi}, k) &= [(\underline{I} - \theta(k) \underline{m}(k) \underline{m}^T(k)) \underline{\phi}(k)]^T \cdot \\ &\quad [(\underline{I} - \theta(k) \underline{m}(k) \underline{m}^T(k)) \underline{\phi}(k)] - \underline{\phi}^T(k) \underline{\phi}(k), \\ \text{bzw.} \end{aligned} \quad (7.76)$$

$$\begin{aligned} \Delta V(\underline{\phi}, k) &= -2\theta(k) \{ \underline{\phi}^T(k) \underline{m}(k) \underline{m}^T(k) \underline{\phi}(k) \} + \\ &\quad + \theta^2(k) \{ \underline{\phi}^T(k) \underline{m}(k) \underline{m}^T(k) \underline{m}(k) \underline{m}^T(k) \underline{\phi}(k) \}, \end{aligned} \quad (7.77)$$

und mit (7.73) folgt

$$\Delta V(\underline{\phi}, k) = -2\alpha \frac{\underline{\phi}^T(k) \underline{m}(k) \underline{m}^T(k) \underline{\phi}(k)}{\underline{m}^T(k) \underline{m}(k)} + \alpha^2 \frac{\underline{\phi}^T(k) \underline{m}(k) \underline{m}^T(k) \underline{\phi}(k)}{\underline{m}^T(k) \underline{m}(k)},$$

oder anders geschrieben (7.78)

$$\Delta V(\underline{\phi}, k) = \alpha(\alpha - 2) \frac{\underline{\phi}^T(k) \underline{m}(k) \underline{m}^T(k) \underline{\phi}(k)}{\underline{m}^T(k) \underline{m}(k)} \quad (7.79)$$

Die Bedingung einer Ljapunovfunktion wird erfüllt, wenn

$$\Delta V(\underline{\phi}, k) \leq 0 \quad , \quad (7.80)$$

d.h. im Fall von (7.79) muß

$$0 < \alpha < 2 \quad (7.81)$$

sein.

Damit asymptotische Stabilität vorliegt und somit die Konvergenz von $\underline{p}(k) \rightarrow \underline{p}^*$ sichergestellt ist, muß

$$\underline{\phi}^T(k) \underline{m}(k) \neq 0 \quad (7.82)$$

sein, d.h.

analog zu den vorhergehenden Abschnitten, muß das System vollständig steuerbar sein und vom Eingangssignal genügend angeregt werden.

Somit lautet das Adaptionsgesetz unter der Berücksichtigung von (7.65) und (7.73)

$$\underline{p}(k+1) = \underline{p}(k) - \frac{\alpha \underline{m}(k) \eta(k)}{\underline{m}^T(k) \underline{m}(k)} \quad (7.83)$$

Entsprechend dem Algorithmus mit verbesselter Konvergenzgeschwindigkeit (Abschnitt 5.1.3), wird $\underline{m}(k)$ orthonormiert und $\alpha = 1$ gesetzt.

Das schrittoptimale Adaptionsgesetz lautet somit

$$\underline{p}(k+1) = \underline{p}(k) - \frac{\hat{\underline{m}}(k) \eta(k)}{\hat{\underline{m}}^T(k) \underline{m}(k)} , \quad (7.84)$$

wobei $\hat{\underline{m}}(k)$ die orthonormierte Folge von $\underline{m}(k)$ ist.

Die Struktur des bilinearen adaptiven Beobachters wird in Bild 7.4 dargestellt, wobei die Elemente des Strukturbildes im einzelnen wie folgt beschrieben werden:

System: S nach (7.1)

$$\begin{aligned} y(k+1) = \sum_{i=1}^n (a_i y(k+1-i) + n_i y(k+1-i)u(k+1-i) + \\ + b_i u(k+1-i)) , \end{aligned} \quad (7.85)$$

Adaptiver Beobachter: AB nach (7.53), (7.54)

$$\underline{\hat{x}}(k) = \underline{S}(k) \underline{p}(k) + \underline{F}^k \underline{\hat{x}}_0 \quad (7.86)$$

$$\hat{y}(k) = \underline{c}^T \underline{\hat{x}}(k) , \quad (7.87)$$

Adaptionsgesetz: AG nach (7.84)

$$\underline{p}(k+1) = \underline{p}(k) - \frac{\hat{\underline{m}}(k) \eta(k)}{\hat{\underline{m}}^T(k) \underline{m}(k)} , \quad (7.88)$$

Beobachterdynamik: D nach (7.24)

$$\underline{S}_j(k+1) = \underline{F} \underline{S}_j(k) + \underline{I}_n d_j(k) , \quad \underline{S}_j(k_0) = \underline{0} , \quad (7.89)$$

$j \in \{1, 2, 3\}$.

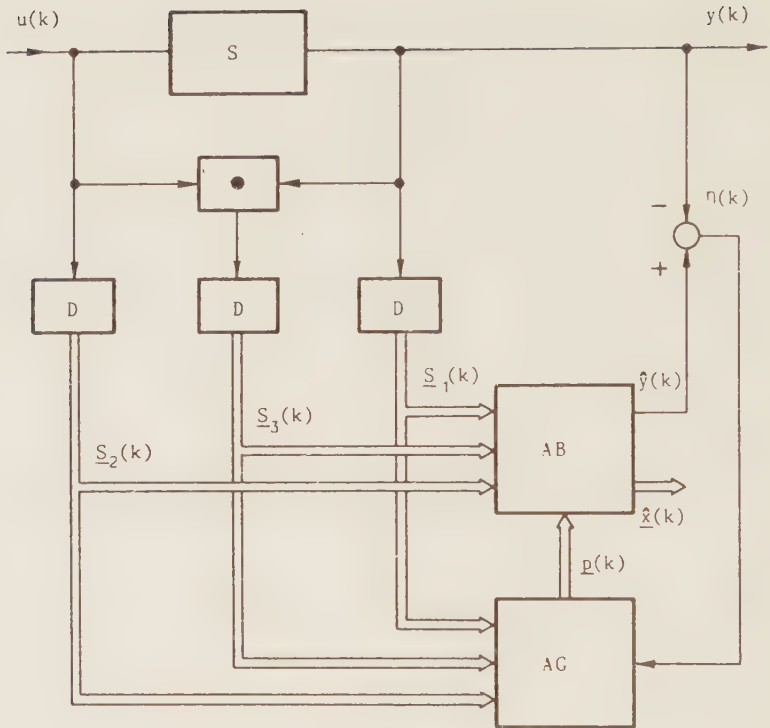


Bild 7.4: Strukturdiagramm eines bilinearen adaptiven Beobachters nach den Gleichungen (7.85)–(7.89)

7.5 Simulationsergebnisse

Das zu identifizierende zeitdiskrete bilineare Einfachsystem (6.30) kann entsprechend (3.65)-(3.69), durch folgende Zustandsbeschreibung

$$\underline{x}(k+1) = \begin{bmatrix} \underline{a} & \vdots & 1 \\ & & 0 \end{bmatrix} \underline{x}(k) + u(k) \begin{bmatrix} \underline{n} & \vdots & 0 \\ & & 0 \end{bmatrix} \underline{x}(k) + bu(k) \quad (7.90)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{x}(k) \quad , \quad \underline{x}(k_0) = \underline{0} \quad , \quad (7.91)$$

mit

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} -0.4 \\ 0.05 \end{bmatrix} , \quad \underline{n} = \begin{bmatrix} -0.1 \\ 0.02 \end{bmatrix} , \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} -0.1 \\ 0.2 \end{bmatrix} \quad (7.92)$$

beschrieben werden. Die Systemparameter werden als nicht bekannt vorausgesetzt.

Der adaptive Beobachter lautet nach (7.86), (7.87)

$$\hat{\underline{x}}(k) = \underline{S}(k) \underline{p}(k) + \underline{F}^k \hat{\underline{x}}_0 \quad (7.93)$$

$$\hat{y}(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \hat{\underline{x}}(k) \quad , \quad (7.94)$$

wobei $\underline{S}(k)$ sich aus der Differenzengleichung (7.89) ableiten läßt.

Für die Anfangswerte des Beobachters gilt:

$$\underline{p}(k_0) = \underline{0} \quad (7.95)$$

$$\hat{\underline{x}}(k_0) = \underline{0} \quad (7.96)$$

$$\underline{S}(k_0) = \underline{0} \quad . \quad (7.97)$$

Damit der Beobachtervorgang schneller abklingt als die Zeitvorgänge im System, werden die Eigenwerte der $\underline{F}$ -Matrix $\lambda_{1,2} = 0$ gewählt, d.h.

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} . \quad (7.98)$$

Das Eingangssignal sei wieder

$$u(k) = 0.5 (\sin 0.2k + \sin 0.5) . \quad (7.99)$$

Der Adaptionalgorithmus lautet unter der Berücksichtigung von (7.88)

$$\underline{p}(k+1) = \underline{p}(k) - \frac{\hat{\underline{m}}(k) \eta(k)}{\hat{\underline{m}}^T(k) \underline{m}(k)} , \quad (7.100)$$

wobei $\hat{\underline{m}}(k)$ die orthonormierte Folge von $\underline{m}^T(k) = \underline{c}^T \underline{S}(k)$ ist.

Mit $\underline{x}(k_0) = \underline{0}$, $\underline{S}(k_0) = \underline{0}$ ist die Meßvektorfolge $\underline{m}(k)$ zu Anfang linear abhängig. Das System muß zunächst einige Abtastschritte durchlaufen, bis lineare Unabhängigkeit vorliegt. Erst dann kann der orthonormierte Vektor $\hat{\underline{m}}(k)$ berechnet werden.

Zu diesem Zeitpunkt setzt gleichzeitig der Adaptionalgorithmus ein. Nach Bild 7.5 und Bild 7.6 entspricht dieser Zeitpunkt dem Abtastschritt $k = 0$.

Bei dem beschriebenen System (7.90), (7.91) spannt der Meßvektor $\underline{m}(k)$ einen sechs-dimensionalen Vektorraum auf, und somit müssen mit sechs Abtastschritten die Systemparameter identifiziert sein (siehe Abschnitt 5.1.3). Der Zustandsfehler $\hat{\underline{x}}(k) - \underline{x}(k)$ geht gleichzeitig gegen Null.

Vergleicht man die Simulationsergebnisse mit denen in Abschnitt 6.3, so zeigt sich, daß die Systemparameter ebenfalls mit sechs Abtastschritten identifiziert wurden. Der einzige Vorteil bei dem adaptiven Beobachter besteht aus der gleichzeitigen Schätzung der Systemparameter und -zustände, welche für adaptive Zustandsregler benötigt werden.

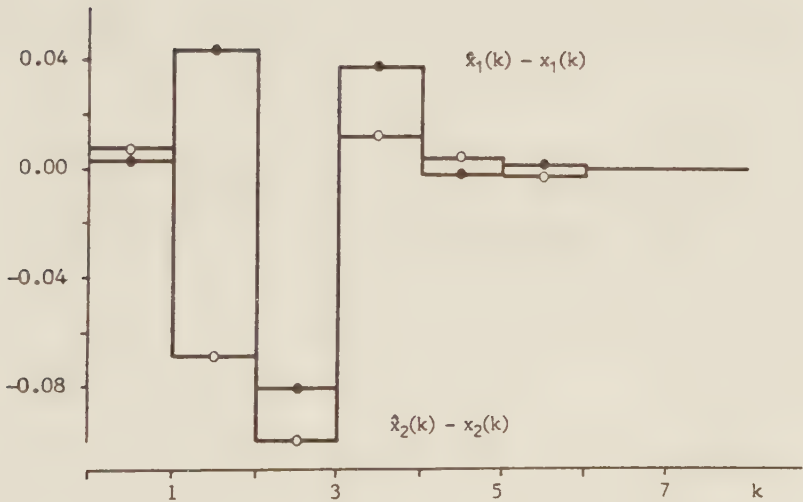


Bild 7.5: Zustandsfehler zwischen den System- und Beobachterzuständen

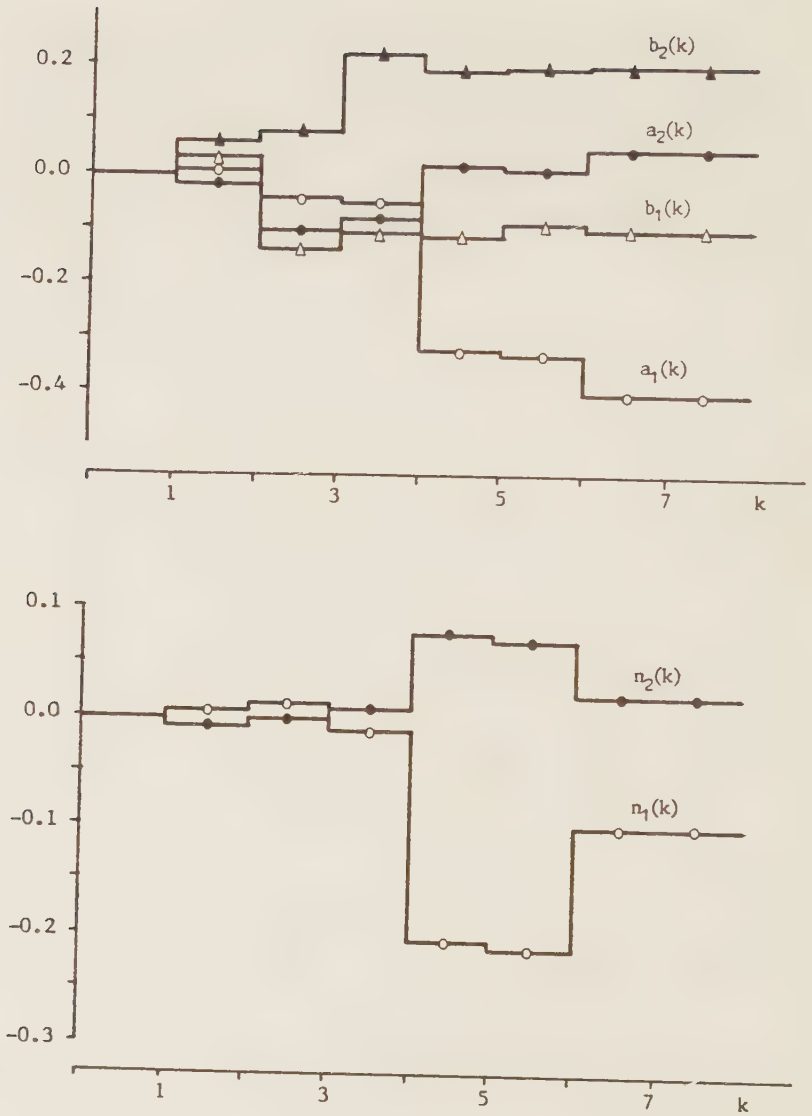


Bild 7.6: Schätzwerte der Systemparameter mit dem adaptiven Beobachter (7.93)

8. Zusammenfassung

Gegenstand dieser Arbeit ist das technisch häufig auftretende Problem, mit Hilfe von Identifikationsverfahren die Systemparameter zu bestimmen. Die immer höheren Ansprüche an die Automatisierungssysteme erfordern praxisnahe Systemnachbildungen, die in der Regel von linearen Modellen nicht erfüllt werden.

Mit diesen Überlegungen wurde eine besondere Klasse nichtlinearer Systeme untersucht, die als bilineare Systeme bezeichnet werden.

Im Sinne dieser Betrachtung und unter besonderer Berücksichtigung der Verwendung von Digitalrechnern, wurden aus der Theorie linearer Systeme bilineare adaptive Identifikationsverfahren entwickelt und miteinander verglichen.

Die Lösung des Entwurfproblems adaptiver Identifikationsverfahren erforderte zunächst die Formulierung verschiedener Darstellungsmöglichkeiten bilinearer Systeme. In Abschnitt 3.2 wurden zu diesem Zweck zwei Sonderfälle der bilinearern Systeme vorgestellt und untersucht. Sie bestehen aus einem linearen System mit multiplikativer Verknüpfung des Ein- und Ausgangs, sowie aus einem linearen System mit multiplikativer Rückführung.

Im Anschluß daran wurden adaptive Identifikationsverfahren für die einzelnen bilinearen Systembeschreibungen abgeleitet. Die Adaptionalgorithmen basieren auf dem Gradientenverfahren, wobei zusätzlich mit der Methode von Ljapunov die asymptotische Stabilität des Gesamtsystems garantiert wird. Bei allen Versionen wurde besonders Wert auf schnelle Konvergenzgeschwindigkeit gelegt, die sich auf die orthonormierte Meßvektorfolge des Adaptionalogo-

rithmus zurückführen läßt. Als weiterer Vorteil erübrigt sich hierbei die Wahl des Verstärkungsfaktors.

Darüberhinaus wurde ein adaptiver Beobachter für den Sonderfall in Abschnitt 3.2.1 entwickelt. Er ermöglicht die gleichzeitige Schätzung der Systemparameter, sowie der nicht zugänglichen Systemzustände.

Bezüglich des Entwurfs adaptiver Identifikationsverfahren für bilineare Systeme, ließen sich noch einige Probleme betrachten. Insbesondere für das Auftreten von Meßrauschen müssen noch befriedigende Theorien, sowie brauchbare systematische Entwurfsverfahren entwickelt werden.

9. Anhang

9.1 Das Gram-Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren

Satz 9.1:

V sei ein reeller Vektorraum mit Skalarprodukt. Zu jedem linear unabhängigen System

$$\underline{z}_{|k_0, k-1|} \equiv \underline{z}(k_0), \underline{z}(k_0+1), \dots, \underline{z}(k-1) \quad (9.1)$$

in V gibt es ein Orthonormalsystem

$$\underline{\varphi}_{|k_0+1, k|} \equiv \underline{\varphi}(k_0+1), \underline{\varphi}(k_0+2), \dots, \underline{\varphi}(k) \quad \blacksquare \quad (9.2)$$

Mit dem Orthogonalisierungsverfahren von Gram und Schmidt kann man ein beliebiges linear unabhängiges System zu einem Orthonormalsystem modifizieren.

Mangelt schrittweise vor und normiert zuerst $\underline{z}(k_0)$ zu

$$\underline{\varphi}(k_0+1) := \frac{1}{\|\underline{z}(k_0)\|} \underline{z}(k_0) \quad (9.3)$$

und versucht einen orthogonalen Vektor $\underline{v}'(k_0+2)$ als Linearkombination von $\underline{z}(k_0)$ und $\underline{z}(k_0+1)$ so zu bestimmen, daß

$$\underline{v}'(k_0+2) = \underline{z}(k_0+1) + \mu_{21} \underline{z}(k_0), \quad (9.4)$$

bzw.

$$\underline{v}'(k_0+2) = \underline{z}(k_0+1) + \mu_{21} \underline{\varphi}(k_0+1) \quad (9.5)$$

ist, wobei gleichzeitig

$$\underline{\hat{v}}(k_0+1) \perp \underline{v}'(k_0+2) \quad (9.6)$$

berücksichtigt wird.

$\underline{v}'^T(k_0+2)\underline{\hat{v}}(k_0+1) = 0$ bedeutet notwendig mit (9.5), daß

$$0 = \underline{z}^T(k_0+1)\underline{\hat{v}}(k_0+1) + \mu_{21}\underline{\hat{v}}^T(k_0+1)\underline{\hat{v}}(k_0+1) \quad (9.7)$$

ist und man erhält mit $\underline{\hat{v}}^T(k_0+1)\underline{\hat{v}}(k_0+1) = 1$:

$$\mu_{21} = -\underline{z}^T(k_0+1)\underline{\hat{v}}(k_0+1) . \quad (9.8)$$

Der orthogonalisierte Vektor $\underline{v}'(k_0+2)$ von $\underline{z}(k_0+1)$ lautet somit

$$\underline{v}'(k_0+2) = \underline{z}(k_0+1) - \underline{z}^T(k_0+1)\underline{\hat{v}}(k_0+1)\underline{\hat{v}}(k_0+1) \quad (9.9)$$

und es gilt

$$\underline{\hat{v}}(k_0+1) \perp \underline{v}'(k_0+2) . \quad (9.10)$$

Die Normierung

$$\underline{\hat{v}}(k_0+2) = \frac{\underline{v}'(k_0+2)}{\|\underline{v}'(k_0+2)\|} \quad (9.11)$$

ergibt den orthonormierten Vektor.

Die Konstruktion der Orthogonalbasis $\underline{v}'|_{k_0+1,k}$ geht induktiv weiter:

$$\underline{v}'(k_0+3) = \underline{z}(k_0+2) + \mu_{31}\underline{\hat{v}}(k_0+1) + \mu_{32}\underline{\hat{v}}(k_0+2) \quad (9.12)$$

Nun bestimmt man die Koeffizienten schrittweise so, daß die Orthogonalitätsrelationen

$$(\underline{v}'^T(k_0+3)\underline{\hat{g}}(k_0+1)) = (\underline{v}'^T(k_0+3)\underline{\hat{g}}(k_0+2)) = 0 \quad (9.13)$$

erfüllt werden.

Die ersten Schritte hierbei lauten mit (9.12), (9.13)

$$0 = (\underline{v}'^T(k_0+3)\underline{\hat{g}}(k_0+1)) = \underline{z}^T(k_0+2)\underline{\hat{g}}(k_0+1) + \mu_{31}, \quad (9.14)$$

so bekommt man

$$\mu_{31} = -\underline{z}^T(k_0+2)\underline{\hat{g}}(k_0+1). \quad (9.15)$$

Ferner gilt

$$0 = (\underline{v}'^T(k_0+3)\underline{\hat{g}}(k_0+2)) = \underline{z}^T(k_0+2)\underline{\hat{g}}(k_0+2) + \mu_{32} \quad (9.16)$$

und dementsprechend erhält man

$$\mu_{32} = -\underline{z}^T(k_0+2)\underline{\hat{g}}(k_0+2), \quad (9.17)$$

so daß (9.12) mit (9.15), (9.17) geschrieben werden kann als

$$\underline{v}'(k_0+3) = \underline{z}(k_0+2) - \underline{z}^T(k_0+2)\underline{\hat{g}}(k_0+1)\underline{\hat{g}}(k_0+1) - \quad (9.18)$$

$$- \underline{z}^T(k_0+2)\underline{\hat{g}}(k_0+2)\underline{\hat{g}}(k_0+2). \quad (9.18)$$

Somit lautet die allgemeine Form des Orthogonalisierungsverfahrens

$$\underline{v}'(k) = \underline{z}(k-1) - \sum_{j=k_0+1}^{k-1} \underline{z}^T(k-1) \cdot \underline{\hat{g}}(j) \underline{\hat{g}}(j), \quad (9.19)$$

mit dem orthonormierten Vektor

$$\underline{\hat{g}}(k) = \frac{1}{\|\underline{v}'(k)\|} \underline{v}'(k). \quad (9.20)$$

10. Literaturverzeichnis

- [1] Mohler, R.R.: Bilinear Control Processes. Academic, New York, 1973.
- [2] Ruberti, A.; Isidori, A.; D'Alessandro, P.: Theory of Bilinear Dynamical Systems. Springer, New York, 1972.
- [3] Bruni, C.; Di Phillo, G.; Koch, G.: Bilinear Systems: An Appealing Class of "Nearly Linear" Systems in Theory and Applications. IEEE Trans. Autom. Control, 19 (1974), S. 334-348.
- [4] Mohler, R.R.: On Overview of Bilinear System Theory and Applications. IEEE Trans. Syst., Man, Cybern., 10 (1980), S. 683-688.
On Overview of Stochastic Bilinear Control Processes. IEEE Trans. Syst., Man, Cybern., 10 (1980), S. 913-918.
- [5] Beghelli, S.; Guidorzi, R.: Bilinear Systems Identification from Input- Output Sequences. Proc. IV IFAC Symp. Identif. Syst. Param. Estim., Tbilisi, (1976), S. 1759-1769.
- [6] Goka, T.; Tarn, T.J.; Zaborszky, J.: On the Controllability of a Class of Discrete Bilinear Systems. Automatica, 9 (1973), S. 615-622.
- [7] Baheti, R.S.; Mohler, R.R.; Spang III H.A.: Second - Order Correlation Method for Bilinear System Identification. IEEE Trans. Autom. Control, 25 (1980), S. 1141-1146.
- [8] Baheti, R.S.; Mohler, R.R.; Spang III H.A.: A New Cross Correlation Algorithm for Volterra Kernel Estimation of Bilinear Systems. IEEE Trans. Autom. Control, 24 (1979), S. 661-664.

- | 9 | Kubrusly, C.S.: Identification of Discrete-Time Stochastic Bilinear Systems. Int. J. Control, 33 (1981), S. 291-309.
- | 10 | Svoronos, S.; Stephanopoulos, G.; Aris, R.: On Bilinear Estimation and Control. Int. J. Control, 34 (1981), S. 651-684.
- | 11 | Smith, C.B.; Kuszta, B.; Bailey, J.E.: Mode Identification of Bilinear Systems. Int. J. Control, 37 (1983), S. 943-957.
- | 12 | Soeda, T.; Yoshimura, T.; Konishi, K.: Parameter Identification of Bilinear Systems Using Model Reference Adaptive Techniques. Faculty of Engineering, University of Tokushima, 1978.
- | 13 | Ohkawa, F.; Yonezawa, Y.: A Model Reference Adaptive Control System for Discrete Bilinear Systems. Int. J. Control, 37 (1983), S. 1095-1101.
- | 14 | Lippel, A.; Lopez, P.: Adaptive Observation and Identification of Bilinear Systems. Laboratoire d'Electronique et d'Automatique du Havre, 1983.
- | 15 | Pazdera, J.S.; Pottinger, H.J.: Linear System Identification via Ljapunov Design Techniques. Proc. 10 th Ann. Joint Autom. Control Conf., 1969, S. 795-801.
- | 16 | Kudva, P.; Narendra, K.S.: Stable Adaptive Schemes for System Identification and Control - Part I, II. IEEE Trans. on Syst. Man, Cybern., 4 (1974), S. 542-560.
- | 17 | Carrol, R.; Lindorff, D.: An Adaptive Observer for Single-Input Single-Output Linear Systems. IEEE Trans. Autom. Control, 18 (1973), S. 428-434.

- [18] Lüders, G.; Narendra, K.S.: An Adaptive Observer and Identifier for a Linear System. IEEE Trans. Autom. Control, 18 (1973), S. 496-499.
- [19] Kudva, P.; Narendra, K.S.: Synthesis of an Adaptive Observer using Ljapunov's Direct Method. Int. J. Control, 18 (1973), S. 1201-1210.
- [20] Anderson, B.D.D.: Adaptive Identification of Multiple-Input, Multiple-Output Plants. Proc. 13 th IEEE Conf. on Decision and Control, 1974, S. 273-281.
- [21] Suzuki, T.; Andoh, M.: Design of a Discrete Adaptive Observer based on Hyperstability Theorem. Int. J. Control, 26 (1977), S. 643-653.
- [22] Ichikawa, K.: Principle of Lüders - Narendra's Adaptive Observer. Int. J. Control, 31 (1980), S. 951-965.
- [23] Kreisselmeier, G.: Adaptive Observers with Exponential Rate of Convergence. IEEE Trans. Autom. Control, 22 (1977), S. 3-8.
- [24] Suzuki, T.; Nakamura, T.; Koga, M.: Discrete Adaptive Observer with fast Convergence. Int. J. Control, 31 (1980), S. 1107-1119.
- [25] Kudva, P.; Narendra, K.S.: An Identification Procedure for Discrete Multivariable Systems. IEEE Trans. Autom. Control, 19 (1974), S. 549-552.
- [26] La Salle, J.; Lefschetz, S.: Die Stabilitätstheorie von Ljapunov. BI - Hochschultaschenbuch, Mannheim, 1967.
- [27] Kim, C.G.; Gourishankar, V.: A Model Reference Adaptive Technique of Identification for Discrete Systems. Automatica, 17 (1981), S. 637-640.

